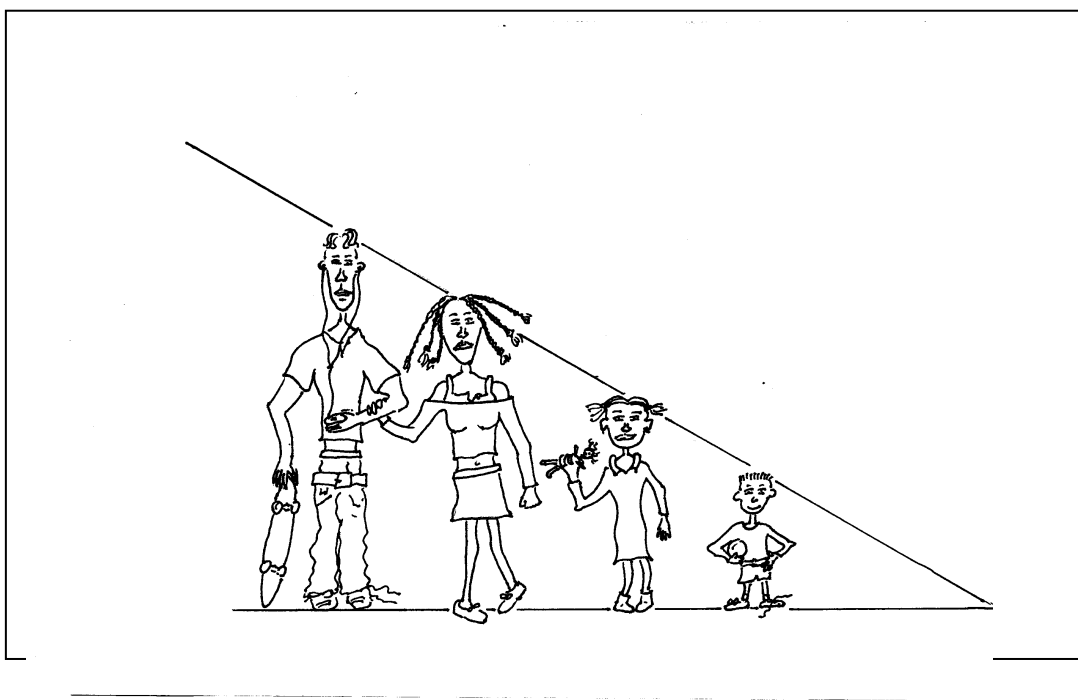


Teorema de Tales

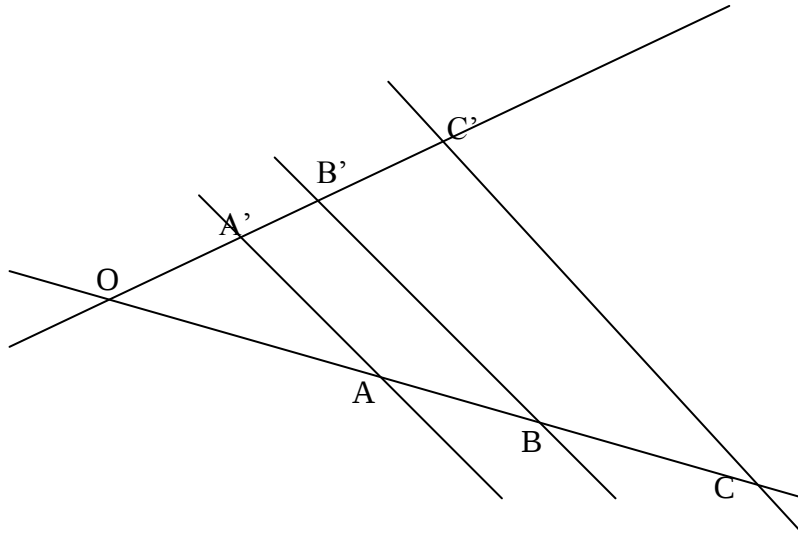


Full de treball A

EL TEOREMA DE TALES

A.1

- a) Dibuixeu dues rectes que es tallin (rectes secants) i després rectes paral·leles que les tallin seguint l'esquema següent:



- b) Mesureu els segments OA, OA', AB, A'B', BC, B'C'.
c) Dividiu la longitud de OA entre OA', AB entre A'B', BC entre B'C'.
Expresseu els resultats arrodonits amb una xifra decimal.
d) Quina conclusió podeu treure?

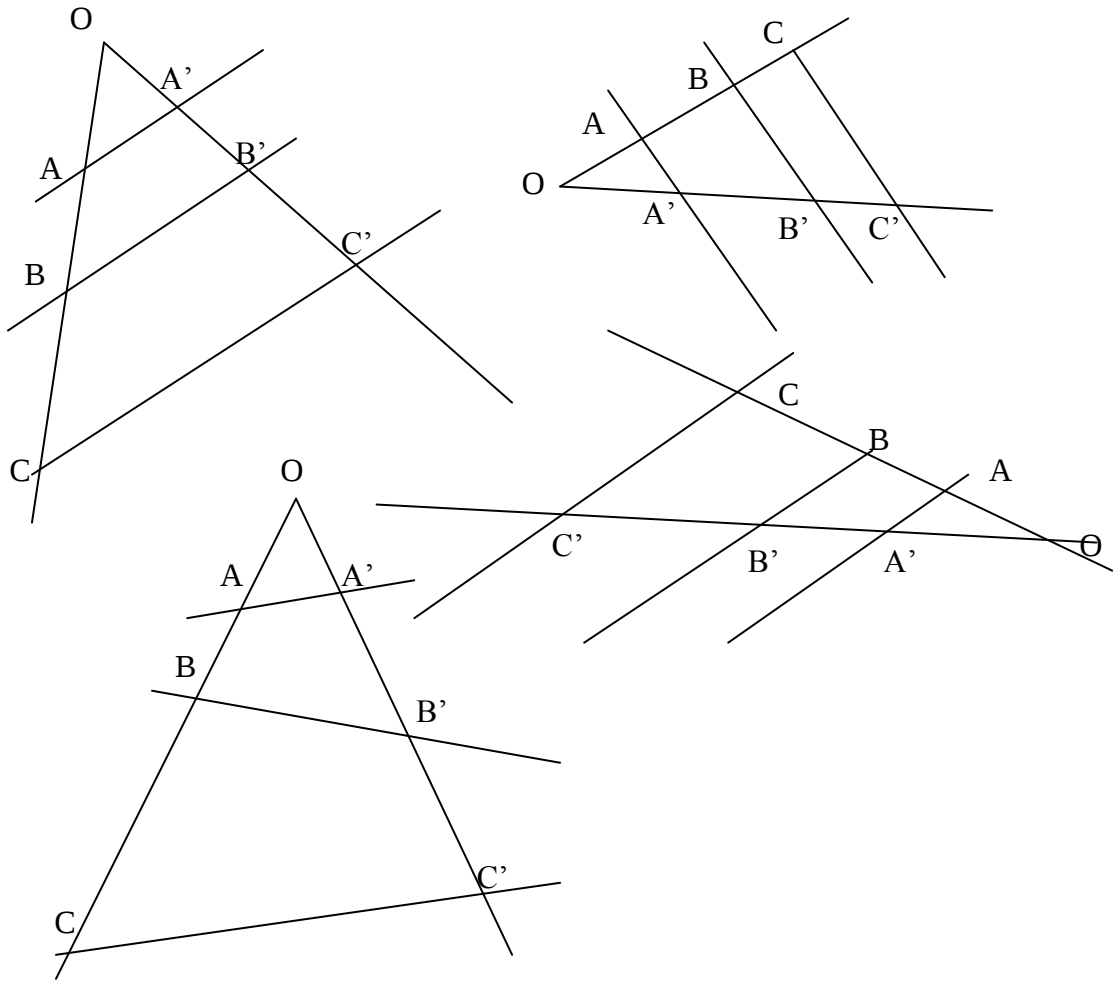
A.2

Repetiu l'exercici anterior però feu que les rectes no siguin paral·leles.

A.3

- a) Mesureu les longituds necessàries per calcular les raons següents a cada figura:

$$\frac{OA}{OA'} \quad \frac{AB}{A'B'} \quad \frac{BC}{B'C'}$$



Quina relació hi ha entre les raons? Per què a la tercera figura no es compleix la mateixa relació que en les altres?

b) Mesureu les longituds necessàries per calcular les raons següents a cada figura:

$$\frac{OA}{AA'} \quad \frac{OB}{BB'} \quad \frac{OC}{CC'}$$

Aquestes igualtats tradueixen en forma simbòlica el teorema de Tales, l'enunciat del qual és :

Teorema de Tales

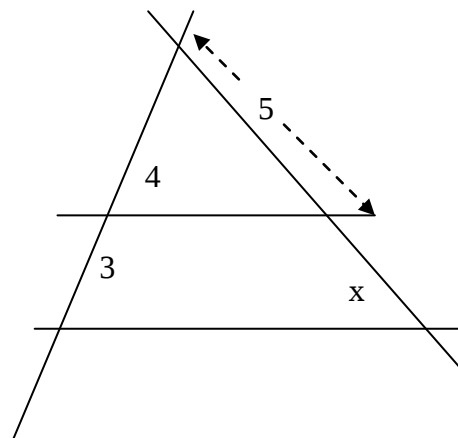
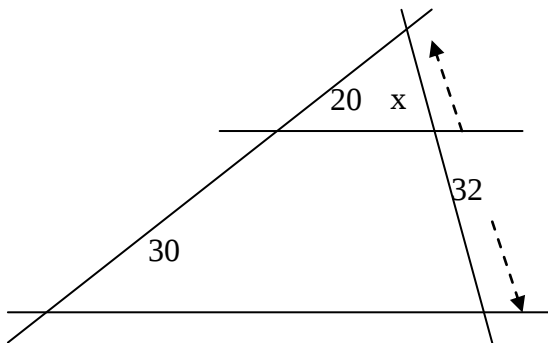
Els segments determinats per rectes paral·leles sobre dues rectes secants són proporcionals.

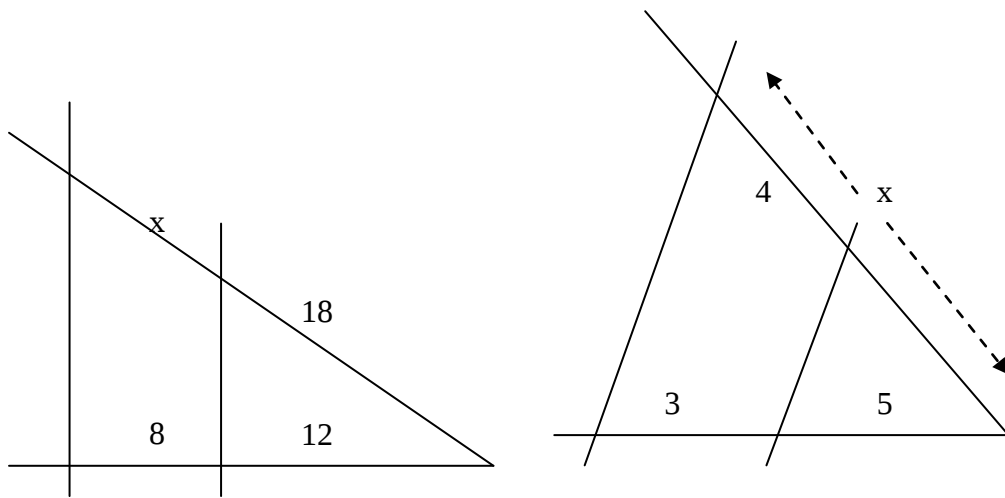
Els grecs se servien d'aquest teorema per a realitzar càlculs fraccionaris mitjançant mesures geomètriques que no podien realitzar servint-se dels nombres. El teorema de Tales va permetre dividir qualsevol segment en el nombre de parts que hom volia mitjançant el nombre corresponent de rectes paral·leles entre sí. Llavors aquests criteris servien per establir les plantes dels temples, calcular la distància entre les columnes, llur diàmetre, llur alçària.

Així aquests criteris van convertir-se en cànons de bellesa i harmonia. Però també servien per a determinar millor les distàncies envers les costes aspres i rocoses de les illes gregues, per tal d'evitar esculls perillosos durant la navegació pel Mediterrani oriental.

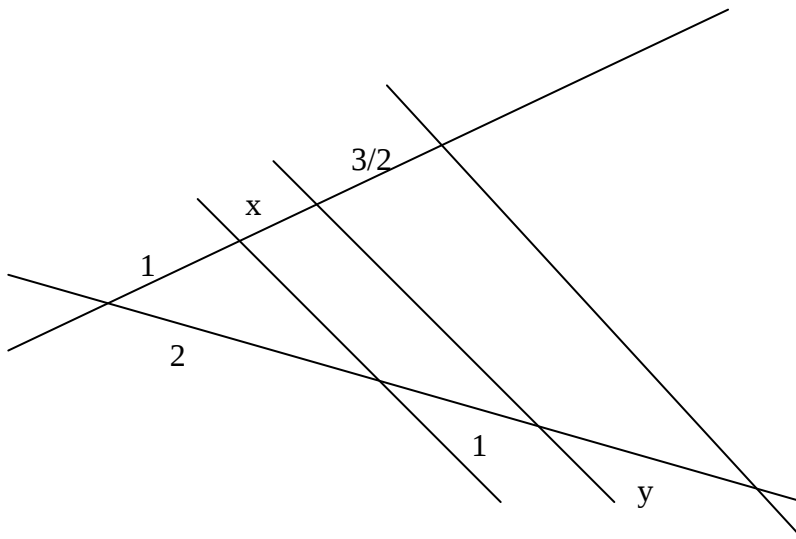
A.4

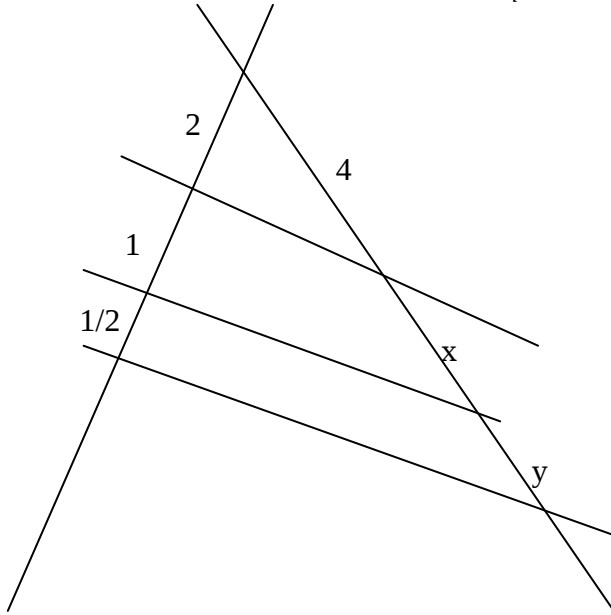
Trobeu la longitud del segment x en les figures següents:





A.5 Trobeu la longitud del segment **x** i **y** en les figures següents:





Full de treball B

Divisió d'un segment en parts iguals

B.1 Dividiu un segment qualsevol en parts iguals:

- a) Dibuixant la seva mediatriu, fent servir el regle i el compàs.
- b) Aplicant el teorema de Tales.

B.2

- a) Dibuixeu un segment d'11 cm i dividiu-lo en 3 parts iguals usant el teorema de Tales.
- b) El mateix en 7 parts iguals.

Els grecs mitjançant mètodes geomètrics resolien equacions del tipus:

$$a : b = c : x$$

$$a : b = b : x$$

és a dir, construïen la **quarta proporcional** dels segments a, b, c i la **tercera proporcional** dels segments a i b.

Quarta proporcional a tres segments donats i tercera proporcional a dos segments donats.

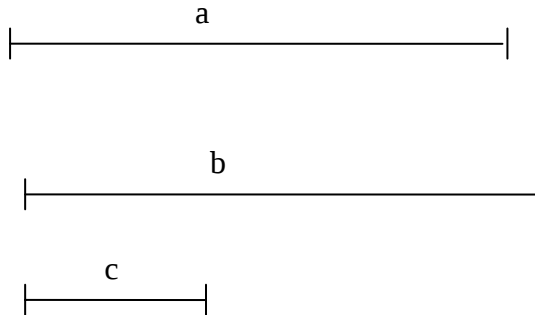
B.3

- a) Construïu, geomètricament, el segment x que sigui quarta proporcional dels segments que amiden 2, 4 i 3 cm; és a dir, que verifiqui la relació:

$$2 : 4 = 3 : x$$

- b) Resoleu la qüestió plantejada algebricament i comproveu que el resultat és la mesura del segment x abans construït.
- c) Feu el mateix amb segments que amiden 1, 3 i 2 cm
- d) Feu el mateix amb segments que amiden 4, 2 i 6 cm

B.4 Donats els segments

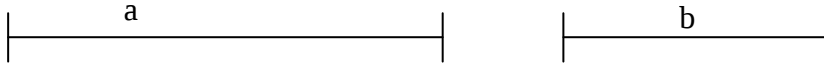


Construïu el segment quarta proporcional dels segments a, b i c.

B.5 Quan en la relació $a : b = c : x$, b i c coincideixen, el segment x s'anomena la tercera proporcional dels segments a i b.

- a) Escriviu la proporció que tradueix la frase : el segment x és tercera proporcional dels segments de mesures 1 i 2 cm.
- b) Feu-ne la construcció geomètrica.
- c) Resoleu també el problema algebricament.
- d) Feu el mateix per a segments de mesures 1 i 3 cm.
- e) Feu el mateix per a segments de mesures 9 i 6 cm.

B.6 Donats els segments



Construïu la tercera proporcional dels segments a i b.

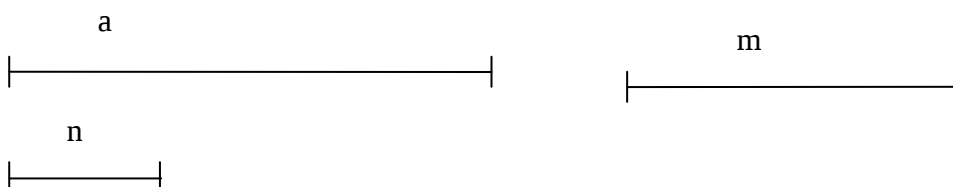
Divisió d'un segment en parts proporcionals a dos o més segments donats.

B.7

- Dibuixeu un segment de 10 cm i dividiu-lo en dues parts proporcionals a 2 i 3.
- Resoleu el problema també al·gèbricament.

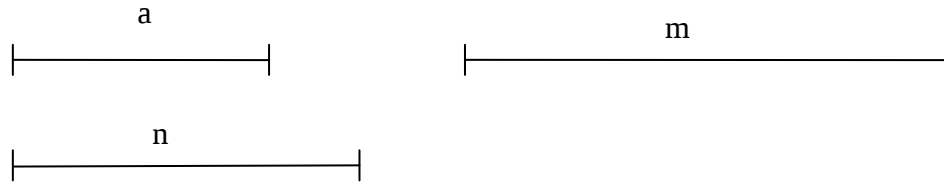
B.8

- Donats els segments



divideix el segment en dues parts proporcionals a m i n.

b) Fes el mateix per als segments



B.9 Dibuixa un segment d'11 cm. i divideix-lo en tres parts proporcionals a 2, 3 i 5, és a dir, determina 3 segments que verifiquin la relació:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$$

i que sumin 11 cm.

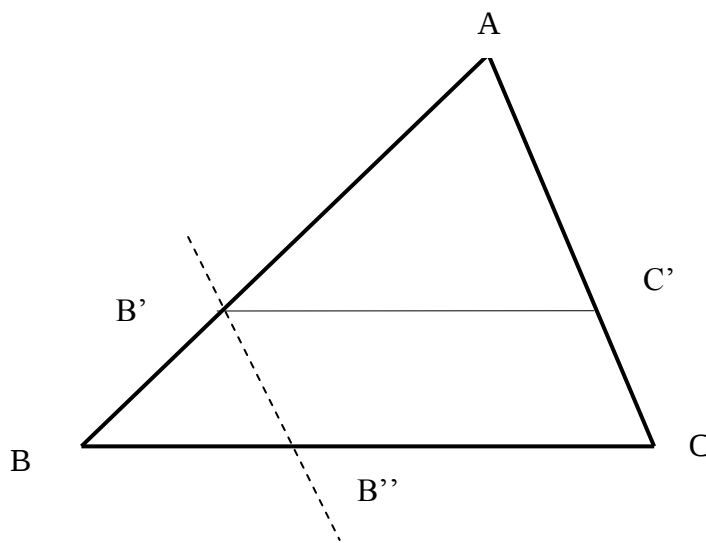
Resol el problema també algèbricament.

Full de treball C

TRIANGLES EN POSICIÓ DE TALES

Finalment veurem com el Teorema de Tales ens permet relacionar els tres costats dels triangles ABC i A'B'C' que es formen en dibuixar dues rectes paral·leles que tallen dues secants.

C.1 Considera la figura següent:



a) Demuestra la relació:

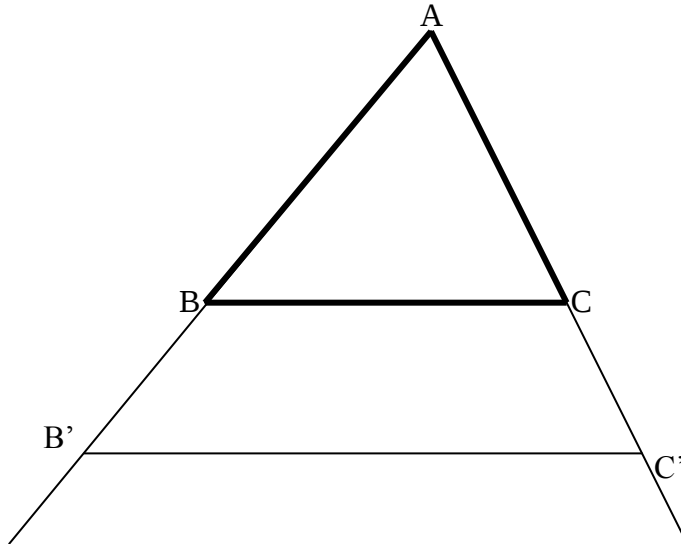
$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}$$

b) Demuestra que també el costat BC i el segment B'C' són en la mateixa proporció, és a dir, que es compleix:

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$$

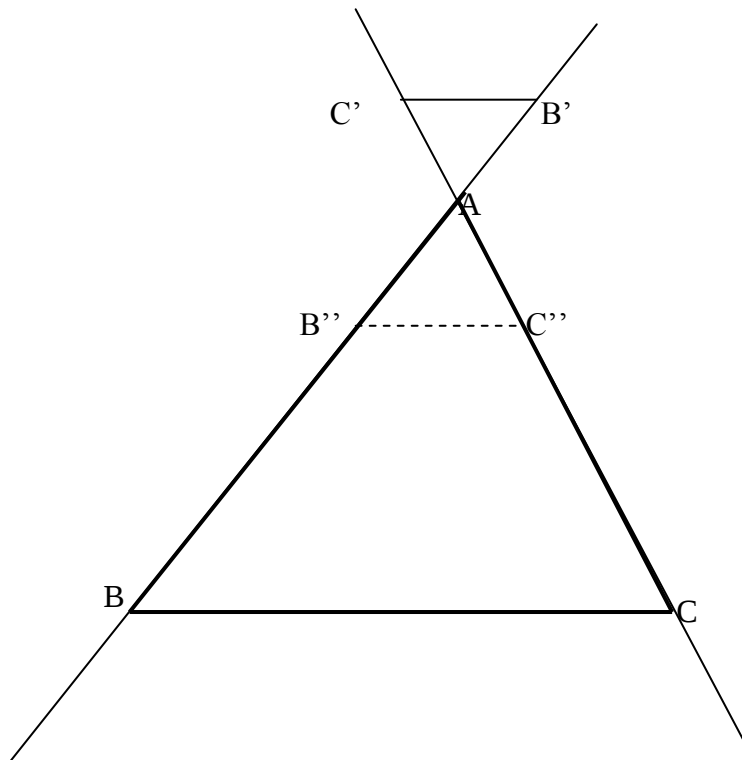
La figura indica el camí a seguir: dibuixar per B' una paral·lela a AC i repetir el raonament considerant com a punt d'intersecció de les rectes concurrents el punt B i no l'A.

C.2 També pot donar-se que en dibuixar les dues paral·leles la situació sigui la de la figura:



Repeteix la demostració de l'exercici anterior.

C.3 La situació també pot ser



Per fer la demostració en aquest cas podeu considerar el triangle auxiliar $AB''C''$ tal, que $AB'' = AB'$ i $B''C''$ paral·lela a BC i $B'C'$.

- a) Demostra que els triangles $AB'C'$ i $AB''C''$ són iguals.
- b) Demostra la proporcionalitat dels costats dels triangles ABC i $AB'C'$.

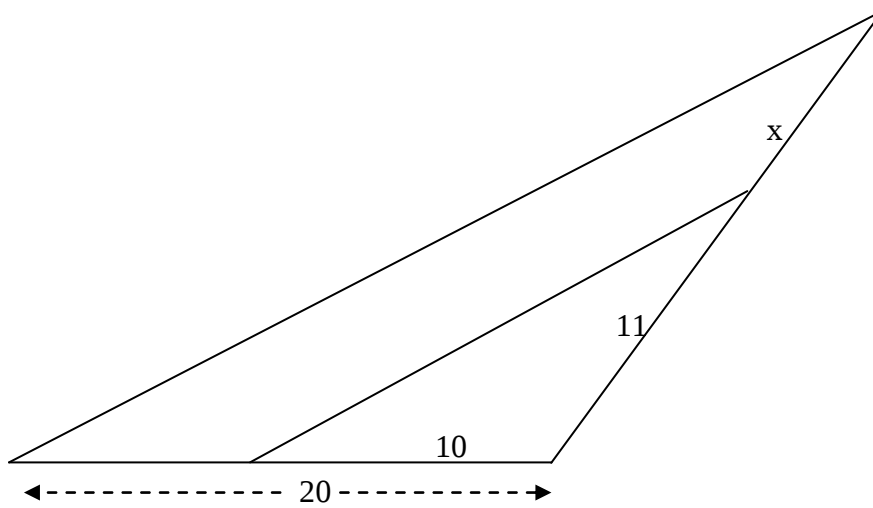
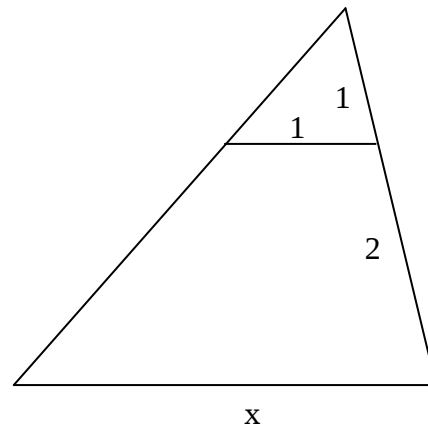
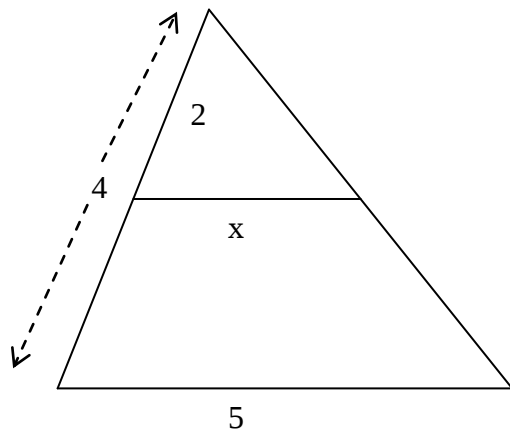
Quan dos triangles presenten la disposició dels exercicis C.1 C.2 i C.3, és a dir, quan tenen un vèrtex comú i els costats oposats a aquests vèrtex paral·lel, hom diu que estan en “**posició de Tales**”.

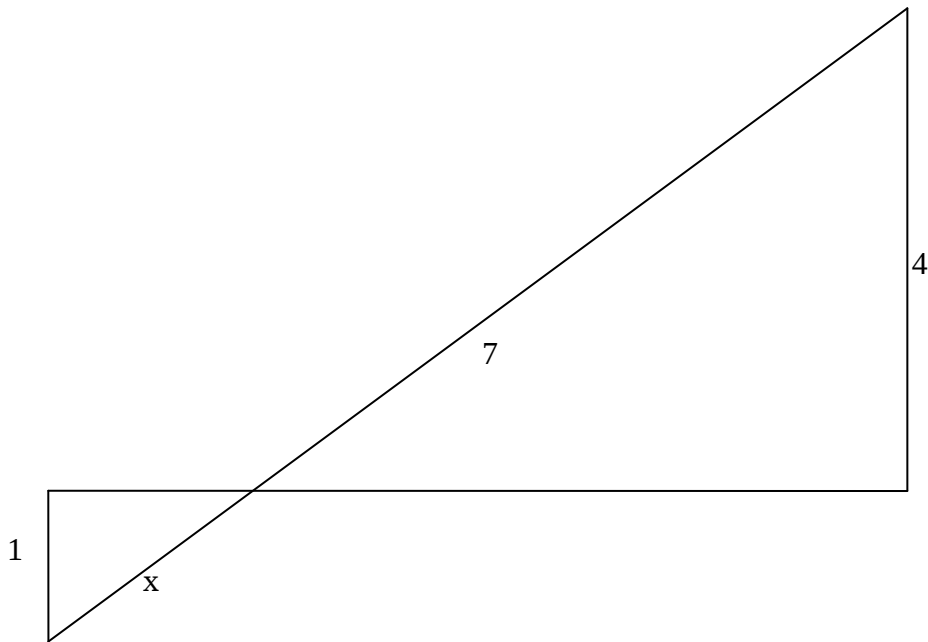
Si dos triangles estan en posició de Tales els **costats homòlegs** (corresponents) són **proporcionals**.

Observeu també que si dos **triangles** estan en **posició de Tales**, tenen els **angles iguals**.

Per tant : **els triangles en posició de Tales tenen els angles iguals i els costats proporcionals**. Diem que **són semblants**, i a la raó de proporcionalitat dels costats l'anomenarem **raó de semblança**.

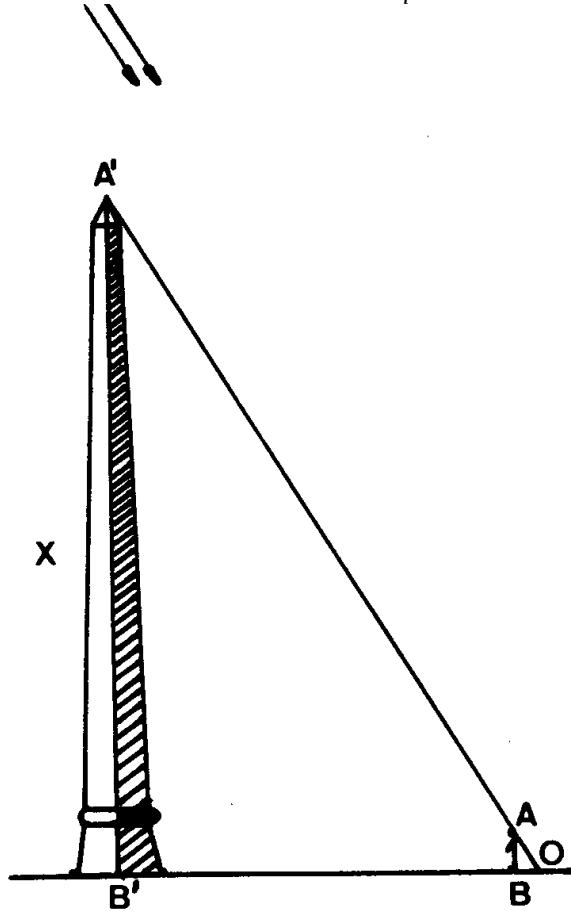
C.4 Troba el segment x en les figures següents:





C.5

L'obelisc, monument religiós propi de l'Egipte faraònic, representa per a uns la imatge estilitzada d'un raig de sol, i per altres el dit de Déu. Les altures varien entre els 19 i els 17 m. Veurem ara com col·locant de manera adequada la nostra ombra respecte de la seva, podem calcular-ne l'altura.



Tal com ve indicat a la figura, cal que avancem o reculem en la direcció de l'ombra **OB'** de l'obelisc fins que l'extrem de la seva ombra i la nostra coincideixin punt O.

Així tenim dos triangles en posició de Tales:

OAB i OA'B'.

Es verifica doncs $\frac{A'B'}{AB} = \frac{OB'}{OB}$

Relació que permet calcular A'B' tot coneixent la nostra altura (AB) i mesurant les ombres OB' i OB.

- Fes els càlculs si l'observador amida 1,60 m. I ha efectuat les mesures d'11 i 1 metre de les ombres.
- Pots repetir l'experiència per a mesurar l'altura d'arbres i d'edificis.

C.6 El problema del faraó

Quan el savi Tales de Milet, cap a l'any 600 aC., es trobava a Egipte, un enviat del faraó li va demanar, en nom del sobirà, que calculés l'altura de la

gran piràmide de Keops. Efectivament, corria la veu que el savi sabia calcular l'altura de construccions elevades per mitjà de mètodes geomètrics sense necessitat de pujar-hi. Tales es va recolzar en un bastó i va esperar fins que, a mig matí, l'ombra del bastó, mantingut en posició vertical, va tenir una longitud igual a la del bastó. Aleshores va dir a l'enviat: "Ves i mesura ràpidament la longitud de l'ombra de la Gran Piràmide; en aquest moment és tan llarga com l'altura de la piràmide."

Explica raonadament la resposta de Tales a l'enviat del faraó.

C.7

Sabem que un pal d'1,5 m col·locat verticalment projecta una ombra de 90 cm. Calcula l'altura d'un edifici que a la mateixa hora projecta una ombra de 18 m.

C.8

Un noi d'1,8 m d'alçada projecta una ombra de 80 cm. En el mateix instant, un edifici projecta una ombra de 12 m. Quina és l'altura de l'edifici?

C.9

El campanar d'una església projecta una ombra de 70 m en el mateix instant en què un bastó de 0,5 m projecta una ombra de 0,8 m. Quina és l'alçada del campanar?

C.10

Com podem calcular l'alçada d'un edifici, si només disposem d'una cinta mètrica i d'un pal?

Escriu amb detall com ho faries i compara la teva resposta amb la dels teus companys.

C.11

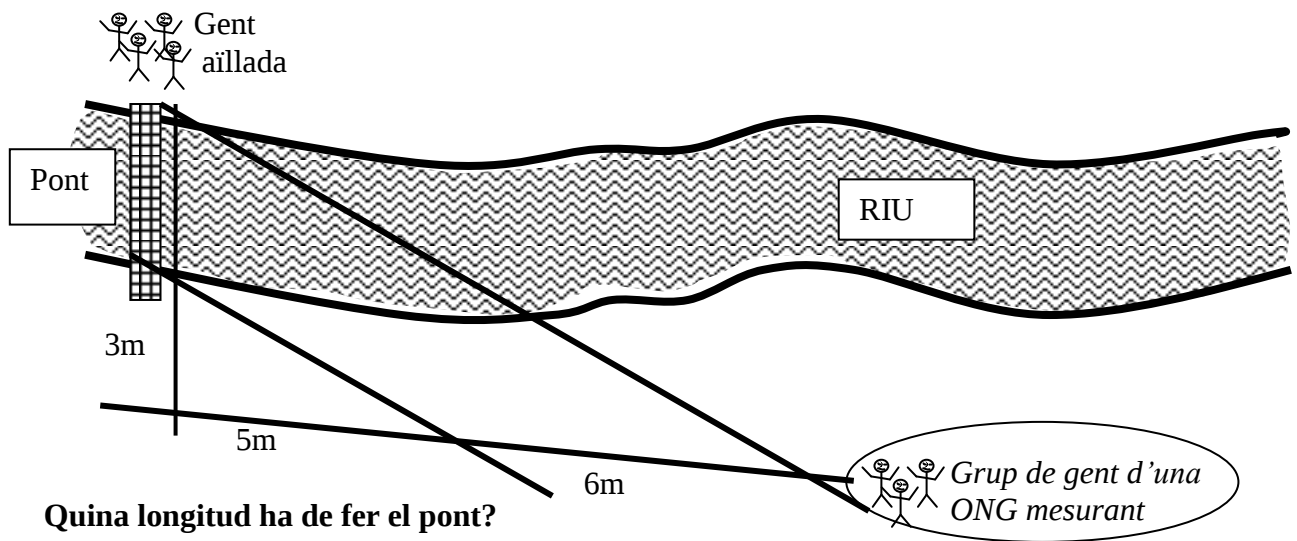
- Construeix un triangle de costats $AB = 9$ cm, $BC = 12$ cm, $CA = 6$ cm i dibuixa una paral·lela MN al costat AC tal que $MC = 4$ cm. Calcula les longituds de AN i de MN .
- Dibuixa, ara, una paral·lela PQ al costat AB tal, que $PA = 2$ cm i calcula BQ i PQ .
- El mateix, RS paral·lela a BC i tal, que $BR = 3$ cm. Calculeu CS i RS .

- d) Uneix, ara, els punts : M amb S, P amb N, i R amb Q i comenta la figura que obteniu.

C.12

Una inundació ha destrossat tots els ponts d'una zona i unes famílies han quedat aïllades. Per salvar-los es vol demanar un pont portàtil a l'exèrcit. Però l'exèrcit demana quina ha de ser la longitud exacta del pont.

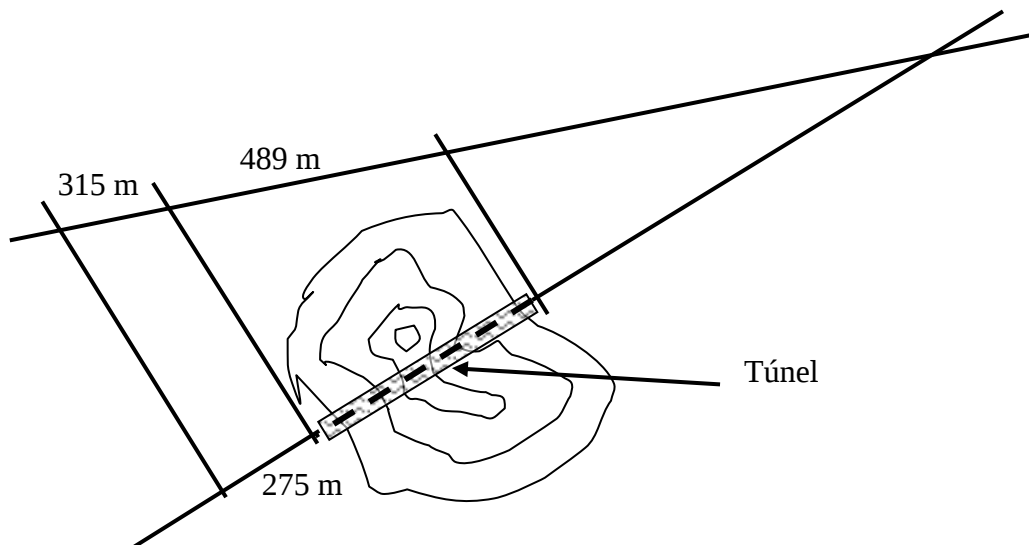
El riu impedeix efectuar la mesura directament així que una ONG efectua les mesures que es veuen en el següent dibuix: (les mesures es fan totes des d'una mateixa vora del riu)



Quina longitud ha de fer el pont?

C.13

Volem construir un túnel per travessar una muntanya. La pròpia muntanya impedeix mesurar quina serà la longitud del túnel però els enginyers mesuren unes distàncies a la vora de la muntanya segons l'esquema següent. Quina serà la longitud del túnel?



C.14 Agafeu un mirall, i una cinta mètrica llarga o un rodòmetre i un pal de més d'un metre de longitud. Aneu al pati amb el vostre professor i calculeu l'alçada de la torre de llum del pati. Utilitzeu el teorema de Tales amb les mesures que us suggereix el següent esquema.

