

Comencem

- En un problema de física es demana el temps que triga una pilota a assolir una certa altura. Un estudiant, que ha resolt el problema correctament, arriba a la solució $t = \sqrt{3}$ s. La resposta que dona és $t = 1,732050808$ s. Et sembla que és correcta aquesta resposta?

No té cap sentit expressar el resultat amb tantes xifres decimals, ja que no hi ha cap aparell de mesura de temps que pugui apreciar fins a la mil·lionèsima de segon.

- Si $a \approx 5,325$ i $b \approx 2,434$, calcula $a + b$ i $a \cdot b$ i indica en cada cas les xifres decimals correctes.

$$a \approx 5,325 \quad b \approx 2,434$$

$$5,3245 \leq a < 5,3255$$

$$2,4335 \leq b < 2,4345$$

$$7,7580 \leq a + b < 7,7600 \rightarrow a + b \approx 7,75$$

Si en lloc de sumar multipliquem ordenadament, s'obté:

$$12,95717075 \leq a \cdot b < 12,96492975$$

$$\text{Per tant, } a \cdot b \approx 12,9.$$

Exercicis

- Calcula la longitud dels segments indicats a continuació. Expressa'n el resultat de manera exacta i utilitza la calculadora per obtenir-ne una aproximació arrodonida a les centèsimes:

a) La diagonal d'un rectangle de costats 3 i 5 cm.

b) El diàmetre d'una circumferència la longitud de la qual és 10 cm.

c) L'altura d'un triangle equilàter de 4 cm de costat.

d) L'altura d'un con que mesura 6 cm de radi i 9 cm de generatriu.

a) Diagonal: d

$$d = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34} \text{ cm} \approx 5,83 \text{ cm}$$

b) Diàmetre: d

$$d = \frac{L}{\pi} = \frac{10}{\pi} \text{ cm} \approx 3,18 \text{ cm}$$

c) Altura: h

$$h = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} \text{ cm} = 2\sqrt{3} \text{ cm} \approx 3,46 \text{ cm}$$

d) Altura: h

$$h = \sqrt{9^2 - 6^2} = \sqrt{45} \text{ cm} = 3\sqrt{5} \text{ cm} \approx 6,71 \text{ cm}$$

- El costat més petit d'un rectangle auri mesura 2 cm. Quant mesura l'altre costat? Expressa'n el resultat de manera exacta i amb una aproximació arrodonida a les dècimes.

$$\text{Mesura } 2\phi, \text{ és a dir, } 2 \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \sqrt{5} \text{ cm} \approx 3,2 \text{ cm.}$$

- Sabent que $PQ = PS = 1$ dm, demostra que el segment QR mesura $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ dm (fig. 2.5).

$$QO = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ dm}$$

$$QR = QO + OR = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \text{ dm}$$

- Classifica els nombres següents en racionals i irracionals:

a) 2,045

b) $-3,88080080008\dots$

c) $1,9$

d) $\frac{113}{114}$

e) 4,3131131113...

f) $0,58421$

Racionals: a), c), d) i f)

Irracionals: b) i e)

- Indica quins d'aquests nombres són irracionals:

a) $\sqrt{25}$

b) $1 + \pi$

c) $\sqrt{5} + 3$

d) 5e

e) $3 + 2\sqrt{49}$

f) $7\sqrt{5}$

g) $\sqrt{16 + 9}$

h) $\sqrt{25 + 36}$

i) $\sqrt{2(16 + 9)}$

Racionals: a), e) i g)

Irracionals: b), c), d), f), h) i i)

- Per què el número $\frac{1,2 + 0,25}{0,16}$ no pot ser irracional?

No pot ser irracional perquè és el resultat de sumar i dividir nombres que són racionals.

- Calcula l'àrea d'un cercle de 4 cm de radi prenent els següents valors de π :

a) L'aproximació per defecte 3,1415.

b) L'aproximació per excés 3,1416.

En quin dels dos casos has obtingut una millor aproximació a la mesura real de la superfície d'aquest cercle? Per què?

a) $A = \pi r^2 \approx 3,1415 \cdot 4^2 = 50,264 \text{ cm}^2$

b) $A = \pi r^2 \approx 3,1416 \cdot 4^2 = 50,2656 \text{ cm}^2$

La segona aproximació és més bona que la primera, ja que l'aproximació per excès del nombre π és millor que l'aproximació per defecte.

8. Expressa de manera exacta:

a) La longitud d'una circumferència de 6 cm de diàmetre.

b) L'àrea lateral d'un cilindre de 2 cm de radi i 5 cm de generatriu.

c) El volum d'un con de 5 cm de radi i 13 cm de generatriu.

a) $L = 6\pi \text{ cm}$

b) $A_{\text{lat}} = 2\pi rg = 20\pi \text{ cm}^2$

c) L'altura del con mesura:

$$h = \sqrt{g^2 - r^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ cm}$$

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 12}{3} = 100\pi \text{ cm}^3$$

9. S'ha aconseguit determinar que el radi d'una circumferència mesura $\frac{4}{\pi}$ cm. Es pot conèixer amb exactitud la seva longitud? I l'àrea del cercle que limita? Justifica la resposta fent els càlculs corresponents.

La longitud de la circumferència es pot conèixer amb exactitud, perquè:

$$L = 2\pi r = 2\pi \cdot \frac{4}{\pi} = 8 \text{ cm}$$

En canvi, només podem saber un valor aproximat de l'àrea del cercle corresponent, ja que $A = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 = \frac{16}{\pi} \text{ cm}^2$, i $\frac{16}{\pi}$ és un nombre irracional.

$$A = \frac{16}{\pi} \text{ cm}^2 \approx 5,09 \text{ cm}^2$$

10. Quant mesura la diagonal d'un cub de 2 cm d'aresta? Expressa'n el resultat de manera exacta i aproxima'l a les centèsimes.

Diagonal: D

$$D = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{12} \text{ cm} \approx 3,46 \text{ cm}$$

11. La longitud d'una circumferència mesura 10π cm.

a) Expressa'n el resultat aproximat a les centèsimes.

b) Quant mesura el radi d'aquesta circumferència?

c) Calcula l'àrea del cercle que limita i expressa-la de manera exacta.

a) $L \approx 314,16 \text{ cm}$

b) $r = \frac{L}{2\pi} = 5 \text{ cm}$

c) $A = \pi r^2 = 25\pi \text{ cm}^2$

12. Troba cinc nombres racionals compresos entre $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{3}$, i ordena'ls del més petit al més gran.

Resposta oberta. Per exemple:

$$0,51 < 0,54 < 0,6 < 0,63 < 0,65$$

13. Entre quins nombres enters consecutius es troba cadascun d'aquests nombres irracionals?

a) $\sqrt{21}$

b) $-\sqrt{54}$

c) $3 - \sqrt{2}$

d) $1 + 2\pi$

e) $3\sqrt{2}$

f) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

g) $\sqrt{226}$

h) $-\sqrt{123}$

i) $3e$

a) $4i5$

b) $-8i-7$

c) $1i2$

d) $7i8$

e) $4i5$

f) $1i2$

g) $15i16$

h) $-12i-11$

i) $8i9$

14. Representa a la recta numèrica els nombres irracionals següents:

a) $\sqrt{17}$

b) $\sqrt{13}$

c) $-\sqrt{29}$

d) $\sqrt{8}$

e) $1 + \sqrt{2}$

f) $3 + \sqrt{5}$

g) $2\sqrt{2}$

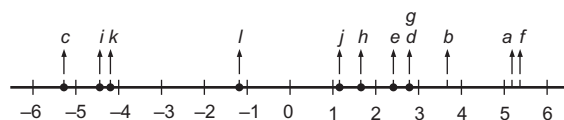
h) $\sqrt{3}$

i) $-\sqrt{20}$

j) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

k) $-\sqrt{18}$

l) $-\sqrt{17} + 3$



15. Compara aquests parells de nombres reals:

a) $\frac{7}{5}$ i $\sqrt{2}$ b) $1 - \sqrt{3}$ i $-0,73$

c) π i $\sqrt{10}$ d) $-1,9$ i 5

e) $-\sqrt{6}$ i $-\sqrt{7}$ f) $4,9$ i 5

g) $\sqrt{\frac{10}{8}}$ i $\sqrt{\frac{10}{9}}$ h) $1,3\widehat{9}$ i $1,4$

a) $\frac{7}{5} < \sqrt{2}$ b) $1 - \sqrt{3} < -0,73$

c) $\pi < \sqrt{10}$ d) $-1,9 > -2$

e) $-\sqrt{6} > -\sqrt{7}$ f) $4,9 < 5$

g) $\sqrt{\frac{10}{8}} > \sqrt{\frac{10}{9}}$ h) $-1,3\widehat{9} = -1,4$

16. Ordena del més petit al més gran els nombres reals següents i col·loca el signe de desigualtat que correspongui: $2,4\widehat{5}$; $2,99$;

$2,9\widehat{}$; $-\sqrt{2}$; $-1,42$; 0 ; $\frac{5}{2}$

$-1,42 < -\sqrt{2} < 0 < 2,4\widehat{5} < \frac{5}{2} < 2,99 < 2,9\widehat{}$

17. Escriu dos nombres racionals compresos entre:

a) $\sqrt{5}$ i $\sqrt{6}$ b) $-\sqrt{2}$ i $-\sqrt{3}$

c) 4 i $\sqrt{17}$ d) e i π

Resposta oberta. Per exemple:

a) $2,41$ i $2,42$

b) $-1,5$ i $-1,6$

c) $4,05$ i $4,1$

d) $2,9$ i 3

18. Expressa de manera exacta:

a) L'àrea d'un triangle equilàter de 4 cm de costat.

b) La longitud de la diagonal d'un rectangle els costats del qual mesuren 4 i 6 cm.

c) El volum d'un cilindre de 2 cm de radi i 3 cm d'altura.

d) L'àrea d'un hexàgon regular inscrit en una circumferència de 8 cm de diàmetre.

a) $A = \frac{c^2}{4}\sqrt{3} = \frac{16}{4}\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$

b) $d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} \text{ cm} = 2\sqrt{13} \text{ cm}$

c) $V = \pi r^2 g = 12\pi \text{ cm}^3$

d) Costat de l'hexàgon: $c = \frac{d}{2} = 4 \text{ cm}$

$A = \frac{3c^2}{2}\sqrt{3} = \frac{3 \cdot 4^2}{2}\sqrt{3} = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2$

19. Aproxima per defecte i per excés fins a les mil·lèsimes cadascun dels nombres irracionals següents:

a) $\sqrt{3}$ b) e c) π

Resposta oberta. Per exemple, prenent 4 xifres decimals per a cada nombre:

	Per defecte	Per excés
$\sqrt{3}$	1,7320	1,7321
π	3,1415	3,1416
e	2,7182	2,7183

20. Extreu factor comú de:

a) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$ b) $7\pi - 3\pi + \pi$

c) $4\sqrt{a} + 5\sqrt{a} - 2\sqrt{a}$ d) $\sqrt{5}a + \sqrt{5}b - \sqrt{5}c$

a) $(3 + 5)\sqrt{2}$

b) $(7 - 3 + 1)\pi$

c) $(4 + 5 - 2)\sqrt{a}$

d) $\sqrt{5}(a + b - c)$

21. Les operacions amb nombres irracionals que s'indiquen a continuació donen com a resultat un nombre racional. Calcula'l en cada cas.

a) $(\sqrt{10})^2$ b) $(15 + 2\sqrt{3})(15 - 2\sqrt{3})$

c) $(3\sqrt{7})^2$ d) $(7\pi - 2\pi) : 3\pi$

e) $(\sqrt{6})^2 - \frac{2}{3}$ f) $\sqrt{(7 - \sqrt{2})(7 + \sqrt{2})} - 11$

a) $(\sqrt{10})^2 = 10$

b) $(15 + 2\sqrt{3})(15 - 2\sqrt{3}) = 225 - 12 = 213$

c) $(3\sqrt{7})^2 = 9 \cdot 7 = 63$

d) $(7\pi - 2\pi) : 3\pi = 5\pi : 3\pi = \frac{5}{3}$

e) $(\sqrt{6})^2 - \frac{2}{3} = 6 - \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$

f) $\sqrt{(7 - \sqrt{2})(7 + \sqrt{2})} - 11 = \sqrt{49 - 2} - 11 = \sqrt{47} - 11$

$= \sqrt{36} = 6$

22. Si x, y, z i t representen quatre nombres reals, escriu cadascuna d'aquestes expressions com un producte de dos factors:

a) $x^2y + xy^2$

b) $x(y + z) + t(y + z)$

c) $z^3 + z^2 + z$

d) $x^2 + 2xy + y^2 + t(x + y)$

e) $z(x - t) - x^2 + 2xt - t^2$

a) $x^2y + xy^2 = xy(x + y)$

b) $x(y + z) + t(y + z) = (y + z)(x + t)$

c) $z^3 + z^2 + z = z(z^2 + z + 1)$

d) $x^2 + 2xy + y^2 + t(x + y) = (x + y)^2 + t(x + y) = (x + y)(x + y + t)$

e) $z(x - t) - x^2 + 2xt - t^2 = z(x - t) - (x - t)^2 = (x - t)(z - x + t)$

23. Calcula sense utilitzar la calculadora:

a) $\sqrt[3]{1000}$

b) $\sqrt[4]{1296}$

c) $\sqrt{\frac{25}{81}}$

d) $\sqrt[5]{-1}$

e) $\sqrt[3]{0,001}$

f) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$

a) 10

b) ± 6

c) $\pm \frac{5}{9}$

d) -1

e) 0,1

f) $\frac{1}{2}$

24. Tot i que a primer cop d'ull no ho sembli, els resultats de les arrels següents són tots racionals. Calcula'ls.

a) $\sqrt{\frac{8}{18}}$

b) $\sqrt[3]{\frac{2}{16}}$

c) $\sqrt{\frac{59}{98}}$

d) $\sqrt[3]{\frac{3}{81}}$

a) $\sqrt{\frac{8}{18}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \pm \frac{2}{3}$

b) $\sqrt[3]{\frac{2}{16}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

c) $\sqrt{\frac{50}{98}} = \sqrt{\frac{25}{49}} = \pm \frac{5}{7}$

d) $\sqrt[3]{\frac{3}{81}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$

25. Expressa en forma de potència:

a) $\sqrt[3]{7}$

b) $\sqrt[4]{a^3}$

c) $\sqrt{10}$

d) $\sqrt[5]{(a + 2)^2}$

e) $\sqrt[6]{6^5}$

f) $\sqrt{\frac{1}{5}}$

a) $7^{\frac{1}{3}}$

b) $a^{\frac{3}{4}}$

c) $10^{\frac{1}{2}}$

d) $(a + 2)^{\frac{2}{5}}$

e) $6^{\frac{5}{6}}$

f) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$

26. Expressa en forma d'arrel:

a) $25^{\frac{1}{3}}$

b) $12^{\frac{1}{4}}$

c) $a^{\frac{3}{5}}$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

e) $b^{\frac{2}{7}}$

a) $\sqrt[3]{25}$

b) $\sqrt[4]{12}$

c) $\sqrt[5]{a^3}$

d) $\sqrt[3]{2^2}$

e) $\sqrt[7]{b^2}$

27. Les potències d'exponent fraccionari verifiquen totes i cadascuna de les propietats de les potències d'exponent enter. Aplica aquestes propietats per expressar en funció d'una sola potència:

a) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$

b) $3^{\frac{2}{3}} : 3^{\frac{1}{4}}$

c) $\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^2$

d) $\frac{2 \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[5]{8}}$

a) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}}$

b) $3^{\frac{2}{3}} : 3^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{2}{3} - \frac{1}{4}} = 3^{\frac{5}{12}}$

$$c) \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 5^{\frac{1}{3} \cdot 2} = 5^{\frac{2}{3}}$$

$$d) \frac{2 \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[5]{8}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[5]{2^3}} = \frac{2 \cdot 2^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{3}{5}}} = 2^{1 + \frac{2}{3} - \frac{3}{5}} = 2^{\frac{16}{15}}$$

28. Utilitza la calculadora i aproxima fins a les centèsimes aquests nombres irracionals:

$$a) \sqrt[3]{10} \quad b) \sqrt[5]{2,76}$$

$$c) \pi^{\frac{1}{4}} \quad d) \sqrt[3]{-50}$$

$$e) 5^{\frac{2}{3}} \quad f) \sqrt[7]{2^4}$$

$$a) 2,15$$

$$b) 1,23$$

$$c) 1,33$$

$$d) -3,68$$

$$e) 2,92$$

$$f) 1,49$$

29. Per simplificar una arrel del tipus $\sqrt[n]{a^m}$, cal aconseguir que m i n siguin nombres primers entre ells. Simplifica:

$$a) \sqrt[12]{a^{10}} \quad b) \sqrt[3]{a^{12}}$$

$$c) \sqrt[15]{3^{10}} \quad d) \sqrt[4]{6^4}$$

$$a) \sqrt[6]{a^5}$$

$$b) a^4$$

$$c) \sqrt[3]{3^2}$$

$$d) \sqrt[4]{2^6} = \sqrt{2^3}$$

30. Esbrina quina de les igualtats següents és incorrecta:

$$a) \sqrt{(a+b)^2} = a+b$$

$$b) \sqrt[3]{a^3 + b^3} = a+b$$

$$c) \sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = a-b$$

La de l'apartat b), ja que $(a+b)^3 \neq a^3 + b^3$

31. Expressa en forma d'una sola arrel:

$$a) \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5} \quad b) 2^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{5}$$

$$c) \frac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{4}}$$

$$d) \frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 6^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{15}}$$

$$e) (\sqrt[7]{2^3})^4$$

$$f) 3^{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{2} =$$

$$g) (a+b)^{\frac{1}{2}} \sqrt{a-b}$$

$$h) 2\sqrt{5}$$

$$i) \sqrt{\sqrt{13}}$$

$$j) \sqrt{a\sqrt[3]{a^2}}$$

$$a) \sqrt[3]{3 \cdot 5} = \sqrt[3]{15}$$

$$b) \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10}$$

$$c) \sqrt[3]{\frac{12}{4}} = \sqrt[3]{3}$$

$$d) \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{18}{15}} = \sqrt{\frac{6}{5}}$$

$$e) \sqrt[7]{2^{3 \cdot 4}} = \sqrt[7]{2^{12}}$$

$$f) \sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[6]{3^2} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 2} = \sqrt[6]{54}$$

$$g) \sqrt{(a+b)(a-b)} = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$h) \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{20}$$

$$i) \sqrt[4]{13}$$

$$j) \sqrt[3]{\sqrt[3]{a^5}} = \sqrt[6]{a^5}$$

32. Expressa de la manera més senzilla possible:

$$a) \sqrt{10} + 2\sqrt{10} - \frac{1}{2}\sqrt{10}$$

$$b) 3\sqrt{12} - 2\sqrt{75} + 7\sqrt{3}$$

$$c) \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[3]{2}$$

$$d) \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt[3]{5}}{\sqrt[12]{10}}$$

$$a) \left(1 + 2 - \frac{1}{2}\right)\sqrt{10} = \frac{5}{2}\sqrt{10}$$

$$b) 6\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + 7\sqrt{3} = (6 - 10 + 7)\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$c) \sqrt[12]{5^3} \cdot \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[12]{5^3 \cdot 2^4} = \sqrt[12]{2000}$$

$$d) \frac{\sqrt[12]{7^6} \cdot \sqrt[12]{5^4}}{\sqrt[12]{10}} = \sqrt[12]{\frac{7^6 \cdot 5^4}{10}}$$

33. Racionalitza les expressions fraccionàries següents:

$$a) \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$b) \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$$

$$c) \frac{12}{\sqrt{2}}$$

$$d) \frac{22}{4 - \sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \text{b)} \quad & \frac{1}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3} \\ \text{c)} \quad & \frac{12}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{12}{2}\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \\ \text{d)} \quad & \frac{22}{4-\sqrt{5}} \cdot \frac{4+\sqrt{5}}{4+\sqrt{5}} = \frac{22(4+\sqrt{5})}{16-5} = \\ & = \frac{22(4+\sqrt{5})}{11} = 2(4+\sqrt{5}) \end{aligned}$$

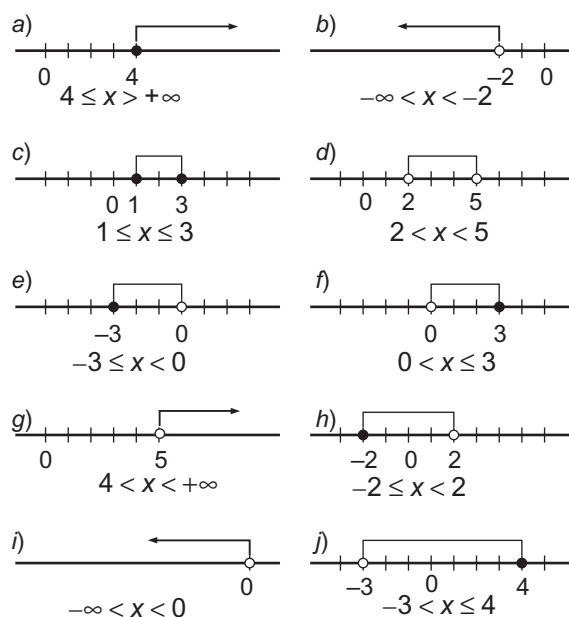
34. Efectua les operacions indicades racionalitzant prèviament cada expressió fraccionària:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{1}{5+\sqrt{3}} + \frac{2}{5-\sqrt{3}} \\ \text{b)} \quad & \frac{7}{4+\sqrt{2}} - \frac{6}{4-\sqrt{2}} \\ \text{a)} \quad & \frac{1}{5+\sqrt{3}} \cdot \frac{5-\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}} = \frac{5-\sqrt{3}}{22}; \\ & \frac{2}{5-\sqrt{3}} \cdot \frac{5+\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}} = \frac{2(5+\sqrt{3})}{22} = \frac{5+\sqrt{3}}{11} \\ & \frac{1}{5+\sqrt{3}} + \frac{2}{5-\sqrt{3}} = \frac{5-\sqrt{3}}{22} + \frac{5+\sqrt{3}}{11} = \\ & = \frac{15+\sqrt{3}}{22} \\ \text{b)} \quad & \frac{7}{4+\sqrt{2}} \cdot \frac{4-\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}} = \frac{7(4-\sqrt{2})}{14} = \frac{4-\sqrt{2}}{2} \\ & \frac{6}{4-\sqrt{2}} \cdot \frac{4+\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}} = \frac{6(4+\sqrt{2})}{14} = \\ & = \frac{3(4+\sqrt{2})}{7} = \frac{12+3\sqrt{2}}{7} \\ & \frac{7}{4+\sqrt{2}} - \frac{6}{4-\sqrt{2}} = \frac{4-\sqrt{2}}{2} - \frac{12+3\sqrt{2}}{7} = \\ & = \frac{4-13\sqrt{2}}{14} \end{aligned}$$

$[4, \infty)$

35. Representa a la recta real els conjunts de nombres següents. Després, defineix-los mitjançant desigualtats: ∞

- a) $[4, \infty)$ b) $(-\infty, -2)$ c) $[1, 3]$
d) $(2, 5)$ e) $[-3, 0]$ f) $(0, 3]$
g) $(5, +\infty)$ h) $[-2, 2)$ i) $(-\infty, 0)$
j) $(-3, 4]$



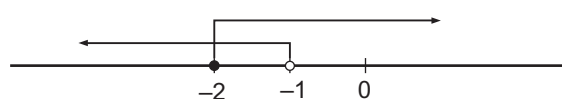
36. Expressa utilitzant la nova notació els conjunts de nombres reals que verifiquen:

- a) $x \geq -3$ b) $x < 4$
c) $-2 \leq x \leq 3$ d) $-5 < x < -1$
e) $-4 < x \leq 6$ f) $x > 7$
a) $[-3, +\infty]$
b) $(-\infty, 4)$
c) $[-2, 3]$
d) $(-5, -1)$
e) $-4 < x \leq 6$
f) $x > 7$

37. Les inequacions $-1 \leq 3x+5$ i $3x+5 < 2$ tenen solucions comunes. Troba-les, representa-les gràficament i expressa-les de dues maneres diferents.

$$-1 \leq 3x+5 \rightarrow -6 \leq 3x \rightarrow x \geq -2$$

$$3x+5 < 2 \rightarrow 3x < -3 \rightarrow x < -1$$



$$-2 \leq x < -1, \text{ o també, } x \in [-2, -1)$$

38. Efectua aquestes operacions amb l'ajut de la calculadora. Expressa'n els resultats utilitzant la notació científica:

a) $2,5 \cdot 10^4 + 10^5 - 6,25 \cdot 10^3$

b) $(10^6 : 4 \cdot 10^{-3}) : 5 \cdot 10^7$

c) $\frac{1,25 \cdot 10^{12} - 10^{12}}{10^{10} + 5 \cdot 10^9}$

d) $(10^4 - 10^7)^2$

a) $1,1875 \cdot 10^5$

b) 5

c) $1,6 \cdot 10$

d) $9,98 \cdot 10^{13}$

39. Una estrella es troba a 4 anys llum de la Terra. Quina es la distància en quilòmetres que la separa del nostre planeta? Un any llum és la distància que recorre la llum en un any a la velocitat de 300 000 km/s.

$$1 \text{ any} \cdot \frac{365 \text{ dies}}{1 \text{ any}} \cdot \frac{24 \text{ h}}{1 \text{ dia}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 31\,536\,000 \text{ s}$$

$$1 \text{ any llum} = 31\,536\,000 \text{ s} \cdot \frac{300\,000 \text{ km}}{1 \text{ s}} =$$

$$= 9,4608 \cdot 10^{12} \text{ km}$$

$$4 \text{ anys llum} = 4 \cdot 9,4608 \cdot 10^{12} = 3,78432 \cdot 10^{13} \text{ km}$$

40. Sabent que un mol d'àtoms de ferro conté $6,02 \cdot 10^{23}$ àtoms d'aquest metall i que té una massa de 55,8 g, esbrina:

a) La massa en grams d'un àtom de ferro.

b) El nombre d'àtoms continguts en 1 g de ferro.

a)

$$1 \text{ àtom Fe} \cdot \frac{1 \text{ mol àtom Fe}}{6,02 \cdot 10^{23} \text{ àtom Fe}} \cdot \frac{55,8 \text{ g Fe}}{1 \text{ mol àtom Fe}} =$$

$$= 9,27 \cdot 10^{-23} \text{ g Fe}$$

b) $1 \text{ g Fe} \cdot \frac{1 \text{ mol àtom Fe}}{55,8 \text{ g Fe}} \cdot$

$$\frac{6,02 \cdot 10^{23} \text{ àtom Fe}}{1 \text{ mol àtom Fe}} = 1,08 \cdot 10^{22} \text{ àtom Fe}$$

Acabem

1. Calcula el costat, el perímetre i l'àrea d'un quadrat inscrit en una circumferència de 2 cm de radi. Quina de les tres mesures s'expressa mitjançant un nombre racional? Expressa les altres dues de manera exacta i amb una aproximació fins a les centèsimes.

El diàmetre de la circumferència coincideix amb la diagonal del quadrat i mesura 4 cm.

Si representen per c el costat del quadrat, es verifica:

$$c^2 + c^2 = 4^2 \rightarrow 2c^2 = 16 \rightarrow c^2 = 8 \rightarrow$$

$$\rightarrow c = 2\sqrt{2} \text{ cm} \approx 2,83 \text{ cm.}$$

El perímetre p del quadrat mesura:

$$p = 4c = 4 \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \text{ cm} \approx 11,31 \text{ cm}$$

i l'àrea A del quadrat és:

$$A = c^2 = 8 \text{ cm}^2$$

L'única mesura que s'expressa mitjançant un nombre racional és la superfície del quadrat.

2. Troba quatre nombres racionals compresos entre $2 + \sqrt{5}$ i $2 + \sqrt{6}$.

Resposta oberta. Per exemple: 4,25; 4,3; 4,42; 4,4.

3. Representa a la recta numèrica els nombres reals següents:

a) $\frac{3}{4}$

b) $1,1\overline{6}$

c) $\sqrt{34}$

d) $-\sqrt{8}$

Representació aproximada:



4. Calcula:

a) $(3\sqrt{5})^2$

b) $(\sqrt{10})^4$

c) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})$

d) $(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{2})^2$

a) $(3\sqrt{5})^2 = 9 \cdot 5 = 45$

b) $(\sqrt{10})^4 = 10^2 = 100$

c) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 5 - 3 = 2$

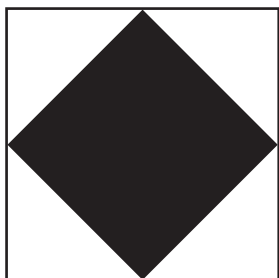
d) $(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{2})^2 = 7 - 2 = 5$

5. Demosta, sense utilitzar la calculadora, que el número $\sqrt{1764}$ és racional. Realitza prèviament la descomposició en factors primers de 1764.

$$1764 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2$$

$$\sqrt{1764} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2} = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$$

6. Dibuixa un quadrat de 2 cm de costat. Determina els punts mitjans dels seus costats i uneix-los successivament. Quina figura n'obtenes? Per què? Calcula'n l'àrea i el perímetre.



S'obté un altre quadrat: els seus costats són iguals i els quatre angles són rectes.

$$\text{Àrea: } A = (\sqrt{2})^2 = 2 \text{ cm}$$

$$\text{Perímetre: } P = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

7. Considera un nombre positiu, eleva'l al quadrat, multiplica'l per 2 i, finalment, extreu-ne l'arrel quadrada. Demuestra que el quocient de la divisió entre l'últim nombre i el primer és igual a $\sqrt{2}$.

$$x \rightarrow x^2 \rightarrow 2x^2 \rightarrow x \cdot \sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2}$$

L'últim pas és possible perquè $x \neq 0$.

8. Calcula:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (1 + \sqrt{2})^2 & \text{b) } (3 - \sqrt{3})^2 \\ \text{c) } (2\sqrt{5} + 1)^2 & \text{d) } (4\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^2 \end{array}$$

$$\text{a) } (1 + \sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$\text{b) } (3 - \sqrt{3})^2 = 9 - 6\sqrt{3} + 3 = 12 - 6\sqrt{3}$$

$$\text{c) } (2\sqrt{5} + 1)^2 = 20 + 4\sqrt{5} + 1 = 21 + 4\sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } (4\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^2 &= \\ &= 32 - 16\sqrt{6} + 12 = 44 - 16\sqrt{6} \end{aligned}$$

9. En quins casos el resultat d'una potència de base 3 és més petit que 3? Justifica'n la resposta amb exemples.

Sempre que l'exponent és més petit que 1.

$$\text{Per exemple: } 3^{\frac{1}{2}} \approx 1,73; 3^0 = 1; 3^{-1} = \frac{1}{3}.$$

10. Expressa com una sola potència:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} & \text{b) } \sqrt[3]{5} : \sqrt[4]{5} \\ \text{c) } \sqrt[7]{a^2} & \text{d) } (\sqrt[4]{b^3})^2 \end{array}$$

$$\text{a) } \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}}$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{5} : \sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{3}} : 5^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{1}{12}}$$

$$\text{c) } \sqrt[7]{a^2} = a^{\frac{2}{7}}$$

$$\text{d) } (\sqrt[4]{b^3})^2 = \sqrt[4]{b^6} = \sqrt[2]{b^3} = b^{\frac{3}{2}}$$

11. Escriu com una única arrel:

$$\text{a) } 10^{\frac{2}{3}} \cdot 10^{-\frac{1}{2}} \quad \text{b) } 7^{\frac{3}{4}} : 7^{0,5}$$

$$\text{c) } \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{5}} \quad \text{d) } 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{a) } 10^{\frac{2}{3}} \cdot 10^{-\frac{1}{2}} = 10^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{10}$$

$$\text{b) } 7^{\frac{3}{4}} : 7^{0,5} = 7^{\frac{3}{4}} : 7^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{7}$$

$$\text{c) } \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{5}} = 2^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{2^2} = \sqrt[5]{4}$$

$$\text{d) } 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{6}$$

12. Expressa de la manera més senzilla possible el resultat de les operacions següents:

$$\text{a) } \sqrt{7} + \sqrt{28} - \sqrt{63}$$

$$\text{b) } \sqrt{121} + \sqrt{169} - \sqrt{225}$$

$$\text{c) } \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}$$

$$\text{d) } \sqrt[4]{b^3} : \sqrt{b}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{7} + \sqrt{28} - \sqrt{63} &= \sqrt{7} + 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3} = \\ &= (1 + 2 - 3) \cdot \sqrt{3} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \sqrt{121} + \sqrt{169} - \sqrt{225} = 11 + 13 - 15 = 9$$

$$\text{c) } \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{7}{6}} = \sqrt[6]{a^7} = a\sqrt[6]{a}$$

$$\text{d) } \sqrt[4]{b^3} : \sqrt{b} = b^{\frac{3}{4}} : b^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{b}$$

13. L'arrel quadrada de l'arrel cúbica d'un nombre positiu x té dos possibles resultats. Per què? Si un d'aquests és 2, quin és l'altre? Calcula x .

Perquè es tracta d'una arrel d'índex parell (índex 6)

$$\sqrt[3]{\sqrt{x}} = \sqrt[6]{x}$$

L'altre resultat és -2 , l'oposat de 2.

$$\sqrt[6]{x} = \pm 2 \rightarrow x = (\pm 2)^6 = 64$$

14. Racionalitza:

$$a) \frac{20}{\sqrt{10}} \quad b) \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} \quad c) \frac{6 + \sqrt{6}}{6 - \sqrt{6}}$$

$$a) \frac{20}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{20\sqrt{10}}{10} = 2\sqrt{10}$$

$$b) \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{7 - 5} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{2}$$

$$c) \frac{6 + \sqrt{6}}{6 - \sqrt{6}} \cdot \frac{6 + \sqrt{6}}{6 + \sqrt{6}} = \frac{36 + 12\sqrt{6} + 6}{36 - 6} = \frac{42 + 12\sqrt{6}}{30} = \frac{7 + 2\sqrt{6}}{5}$$

15. Quina condició han de verificar els coeficients a , b i c de l'equació de segon grau $ax^2 + bx + c = 0$, per tal que les seves solucions siguin nombres reals?

Les solucions de l'equació $ax^2 + bx + c = 0$ són de la forma:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Per tant, perquè aquestes solucions siguin nombres reals s'ha de verificar que:

$$b^2 - 4ac \geq 0$$

16. El perímetre d'un rectangle mesura 16 cm i una de les seves diagonals, $2\sqrt{10}$ cm. Calcula'n l'àrea.

Anomenem x i y les dimensions del rectangle expressades en centímetres. Es verifica:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 2y = 16 \\ x^2 + y^2 = (2\sqrt{10})^2 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x + y = 8 \\ x^2 + y^2 = 40 \end{array} \right\}$$

$$x = 8 - y$$

$$(8 - y)^2 + y^2 = 40 \rightarrow 64 - 16y + y^2 + y^2 = 40 \rightarrow 2y^2 - 16y + 24 = 0 \rightarrow y^2 - 8y + 12 = 0$$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} \begin{matrix} y_1 = 6 \\ y_2 = 2 \end{matrix}$$

Si $y = 6 \rightarrow x = 2$, i si $y = 2$, $x = 6$.

En qualsevol cas, l'àrea del rectangle és $A = 12 \text{ cm}^2$

17. Justifica aquestes igualtats:

$$a) 2\sqrt{3} = \sqrt{12} \quad b) 5\sqrt{2} = \sqrt{50}$$

$$c) \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{\frac{3}{4}} \quad d) a^2 \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^{2n+1}}$$

$$a) 2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$$

$$b) 5\sqrt{2} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = \sqrt{50}$$

$$c) \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 3} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 3} = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$d) a^2 \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^{2n} \cdot a} = \sqrt[n]{a^{2n+1}}$$

18. Les solucions d'una inequació es troben a l'interval $[-5, 2]$, i les d'una altra inequació, a l'interval $[0, 4]$. Expressa mitjançant un interval les solucions comunes a totes dues inequacions. Ajuda't d'un gràfic.



Les solucions comunes són les que es troben a l'interval: $[0, 2]$.

19. Calcula:

$$a) \sqrt{\frac{200}{450}} \quad b) \sqrt{\frac{3}{27}} \quad c) \sqrt{\frac{242}{338}}$$

$$a) \sqrt{\frac{200}{450}} = \sqrt{\frac{100}{225}} = \pm \frac{10}{15} = \pm \frac{2}{3}$$

$$b) \sqrt{\frac{3}{27}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \pm \frac{1}{3}$$

$$c) \sqrt{\frac{242}{338}} = \sqrt{\frac{121}{169}} = \pm \frac{11}{13}$$

20. Quines de les desigualtats següents no són certes? Per què?

$$a) \text{Perquè } 34 \neq 8^2$$

$$c) \text{Perquè } a^2 + b^2 \neq (a + b)^2$$