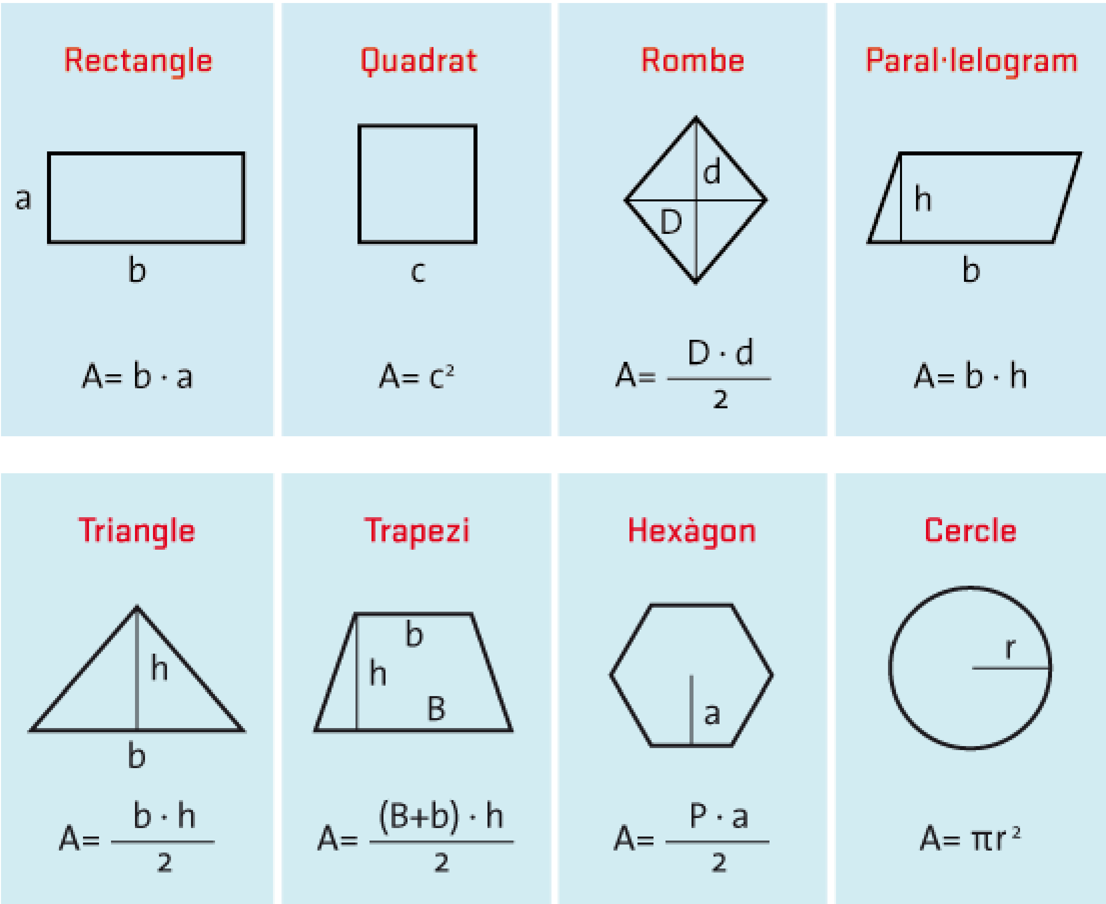
Matemàtiques
2n ESO
Geometria

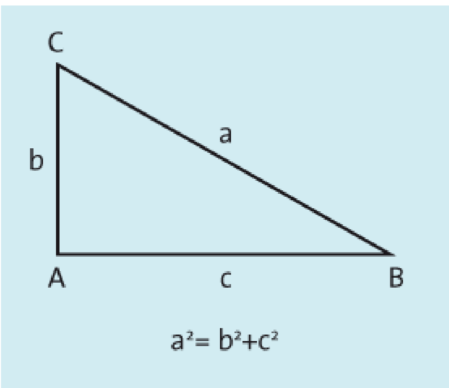
Figures planes

Recordem les figures que vam treballar a primer i la forma com calculàvem la seva àrea, que sempre s'ha d'expressar en unitats de superfície.



I recordem el **teorema de Pitàgores.**

En un triangle rectangle el quadrat de la hipotenusa és igual a la suma dels quadrats dels catets.

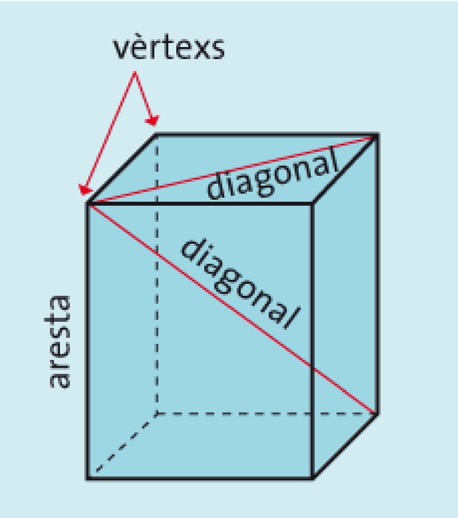


POLIEDRES

Tots els cossos geomètrics limitats per polígons reben el nom de poliedres. Cadascun dels polígons és una cara del poliedre.

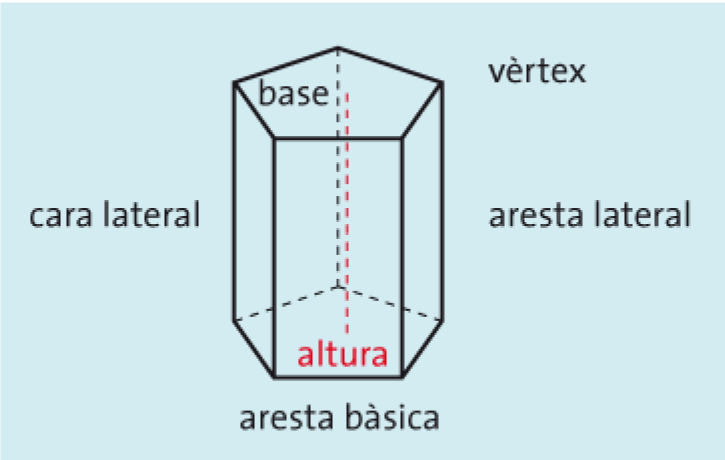
Quan observem un poliedre hi distingim diversos elements:

- Cares: són els polígons que limiten el poliedre.
- Arestes: són les línies on es troben dues cares. Coincideixen amb els costats de les cares.
- Vèrtexs: són els punts on es tallen tres o més arestes.
- Diagonal: és el segment que uneix dos vèrtexs que no són a la mateixa aresta.



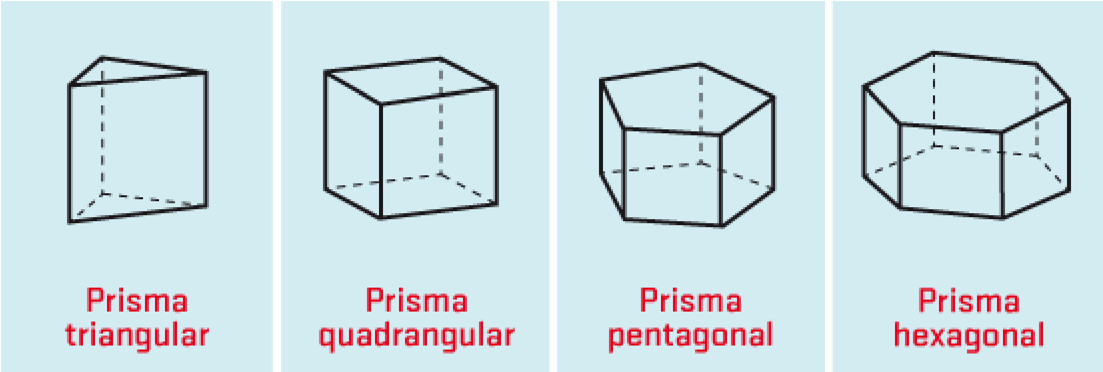
Prismes

Un prisma és un poliedre que té dues cares iguals i paral·leles entre si, anomenades bases, i les seves cares laterals són paral·lelograms.



L'altura d'un prisma és la distància entre les seves bases.

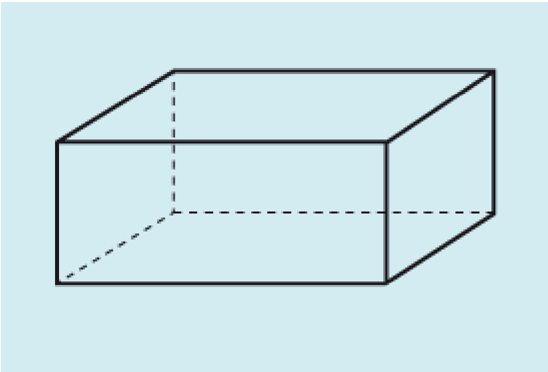
El nom d'un prisma li dóna el polígon que té com a base:



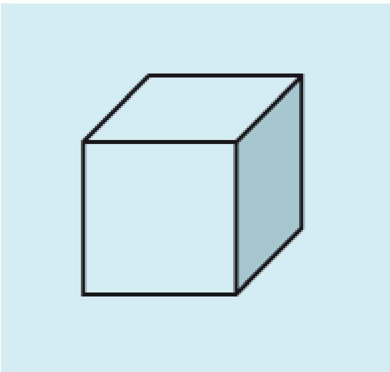
Els paral·lelepípedes

Un paral·lelepípede és un prisma en el qual totes les seves cares són paral·lelograms. Recordem que dins dels paral·lelograms s'hi troben els rectangles, els rombes i els quadrats.

Un ortoedre és un paral·lelepípede amb totes les seves cares rectangulars. L'exemple més típic és el d'una capsa de sabates.

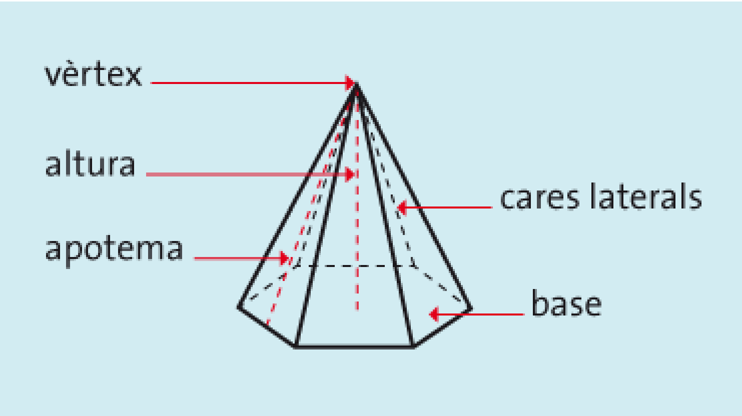


El cos en el qual totes les cares del paral·lelepípede són quadrats s'anomena hexaedre o cub.

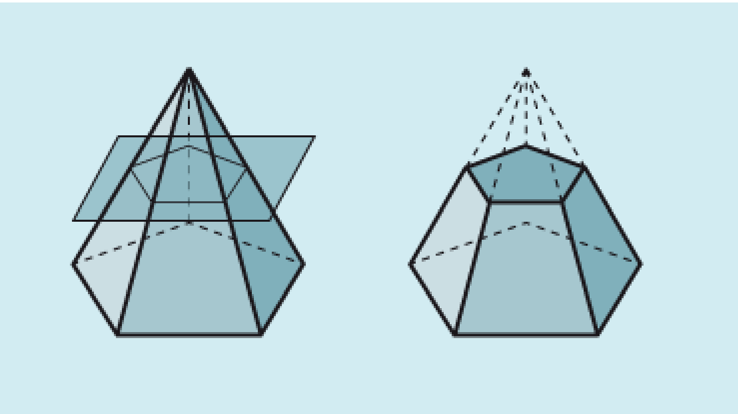


Piràmides

Una piràmide és un poliedre en què una de les cares és un polígon qualsevol i les altres són triangles que concorren en un punt. A la figura es pot veure la nomenclatura utilitzada en una piràmide hexagonal regular recta:



Si tallem una piràmide per un pla paral·lel a la seva base i en traiem la part de dalt, la figura resultant és un **tronc de piràmide**:



Un exemple de tronc de piràmide és aquest contenidor per a la recollida de piles usades.

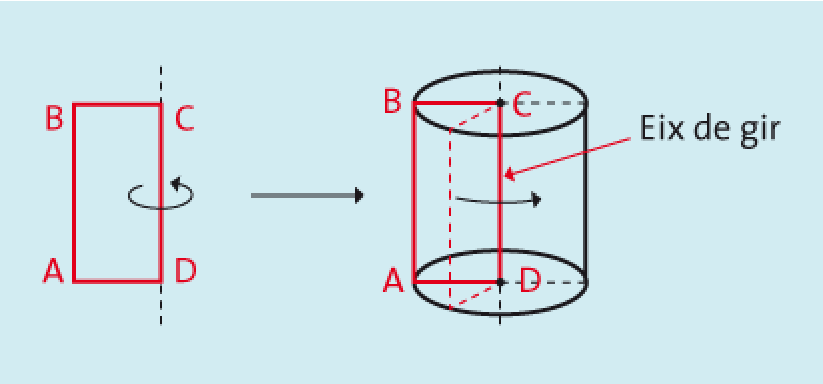
Cossos de revolució

Un cos de revolució és un cos geomètric que s'obté quan es fa girar una figura plana al voltant d'un eix.

Nosaltres estudiarem els cilindres, els cons i l'esfera. La majoria dels cossos rodons es poden considerar com a formats per aquests tres tipus de cossos.

Cilindres rectes

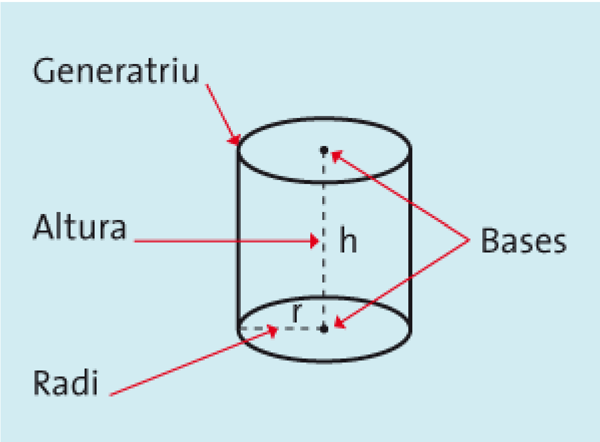
Un cilindre recte és el cos que s'obté quan es fa girar un rectangle sobre un dels seus costats.



El cilindre té dues bases que són dos cercles iguals que tenen com a radi l'altre costat del rectangle.

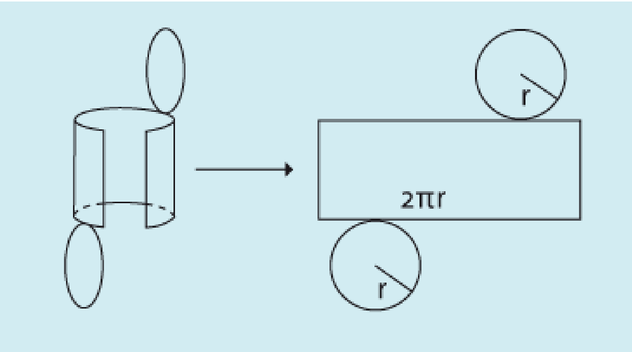
La distància entre les dues bases és l'altura del cilindre i coincideix amb el costat del rectangle original que s'ha fet rotar per obtenir el cilindre.

El costat que queda lliure en la rotació és el que en el cilindre s'anomena generatriu.



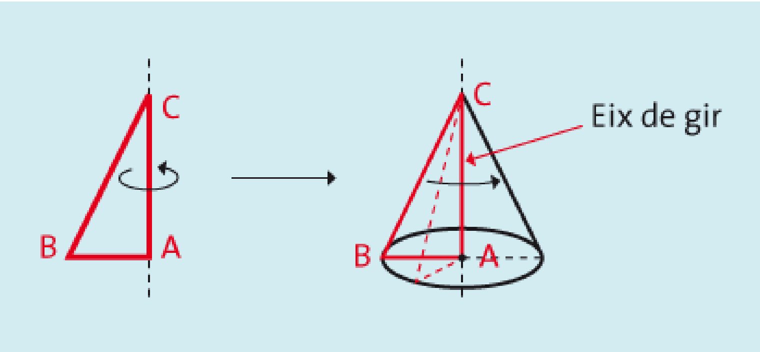
Desenvolupament pla d'un cilindre recte

Si separem els cercles del cilindre i obrim la superfície lateral per la generatriu, obtenim el desenvolupament pla del cilindre, format per un rectangle i dos cercles.



Cons

Un con recte és la figura de revolució que s'obté quan un triangle rectangle gira sobre un dels seus catets.

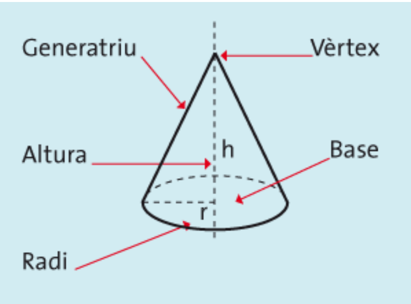


El punt C és el vèrtex.

El cercle generat per l'altre catet s'anomena base. La seva longitud és la del radi de la base.

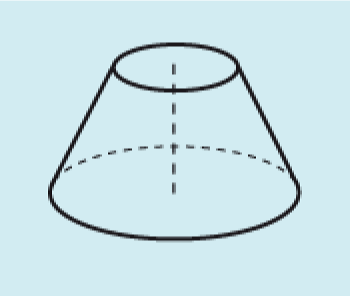
La hipotenusa del triangle original és la generatriu del con.

El catet sobre el qual ha rotat el triangle és l'altura del con.

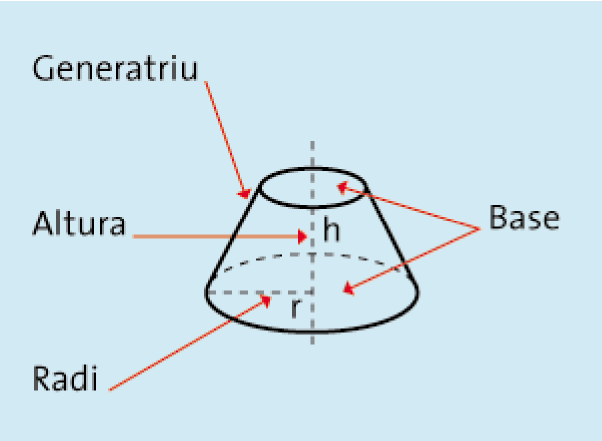


Tronc de con

Si tallem un con per un pla paral·lel a la base, obtenim un **tronc de con**.

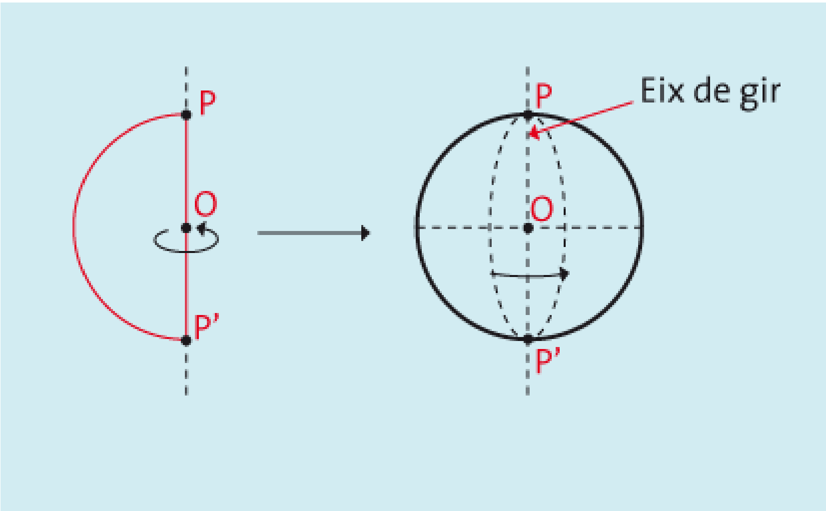


El tronc de con té dues bases circulars, altura i generatriu.

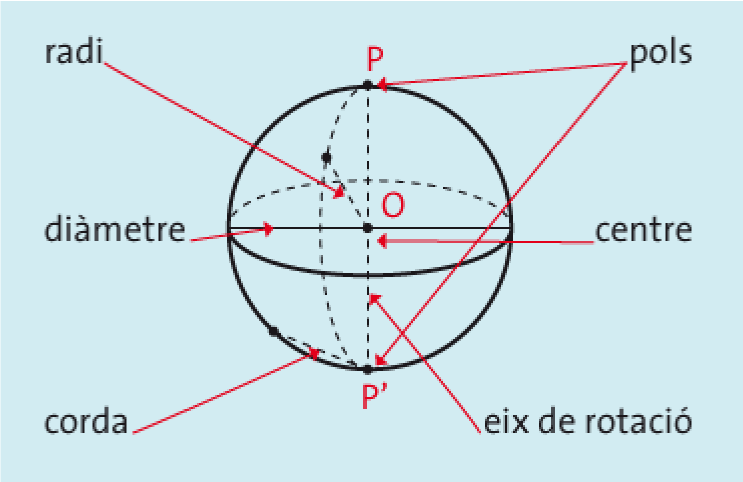


Esfera

Si fem girar sobre el seu diàmetre una semicircumferència, es forma una esfera.



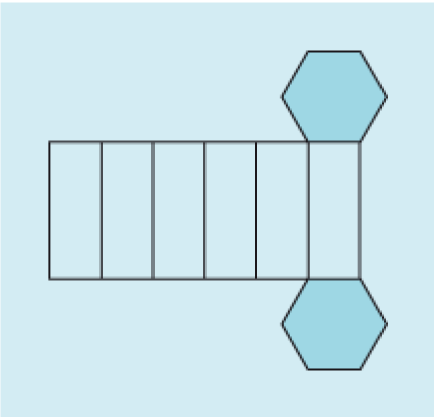
L'eix de l'esfera és el diàmetre sobre el qual gira la semicircumferència.
El centre de la semicircumferència i el seu radi seran, respectivament, el centre i el radi de l'esfera.



Àrees de cossos geomètrics

L'àrea d'un cos serà la suma de les àrees de cadascuna de les seves cares. En els prismes, piràmides, troncs de piràmide, cons i troncs de con calcularem per separat l'àrea de la seva base i l'àrea de les cares laterals. L'àrea total del cos serà el resultat de sumar a l'àrea lateral l'àrea de les seves bases.
Per referir-nos a l'àrea d'un cos utilitzarem la lletra A. A_T significarà àrea total del cos, A_B serà l'àrea de la base i amb A_L representarem l'àrea lateral d'un cos dels

Per trobar l'àrea, normalment hem de descompondre el cos de la figura en les diferents figures planes que el formen. Per treballar amb comoditat utilitzarem la seva representació plana.
Per exemple, en el cas d'un prisma hexagonal, la figura estarà formada per dos hexàgons que són la base i sis rectangles que seran les cares laterals. La seva representació plana serà aquesta:



$A_T = 2 \cdot A_B + A_L = 2 \cdot A_{BASE} + 6 \cdot A_{RECTANGLE\ CARA\ LATERAL}$

Volum d'un cos. Unitats de volum

El volum d'un cos és la quantitat d'espai que ocupa.

La unitat de volum en els cossos sòlids és el **metre cúbic**. Un metre cúbic és l'espai que ocupa un cub d'un metre d'aresta. Per representar les unitats de volum escriurem m^3.

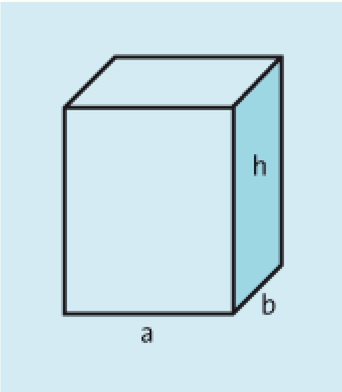
Com en altres unitats del sistema internacional d'unitats, el metre cúbic té múltiples i submúltiples.

Els seus múltiples són: decàmetre cúbic, hectòmetre cúbic i quilòmetre cúbic, i els submúltiples decímetre cúbic, centímetre cúbic i mil·límetre cúbic.

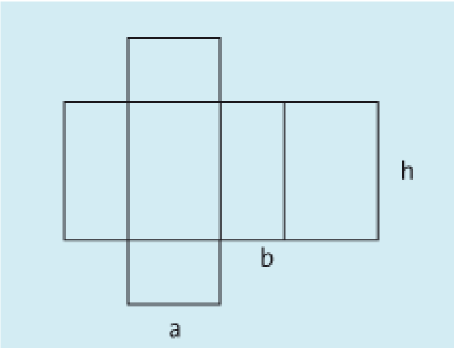
Cadascuna d'aquestes unitats és 1000 vegades superior a la precedent. Així, en un m^3 hi ha 1000 dm^3.

Àrea i volum de l'ortoedre

En un ortoedre hi ha tres mides importants: amplada i llargada del rectangle que es considera com a base i l'altura de l'ortoedre que serà la seva aresta lateral.



El seu desenvolupament pla serà:



Àrea lateral = $A_L = a \cdot h + b \cdot h + a \cdot h + b \cdot h = 2ah + 2bh$
Àrea de la base = $A_B = a \cdot b$
Àrea total = $A_T = 2ab + 2ah + 2bh$
Per calcular el seu volum multiplicarem l'àrea de la base per l'alçada de l'ortoedre:

Volum = $V = A_B \cdot h = a \cdot b \cdot h$

Àrea i volum d'un prisma

En general serà:

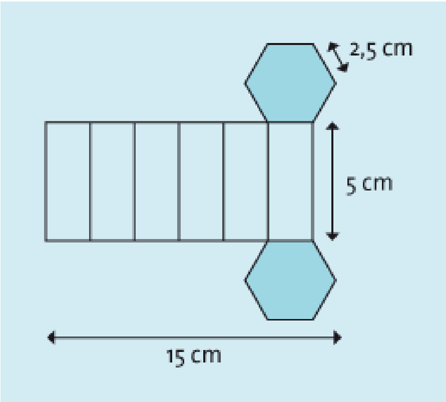
Àrea total = àrea lateral + àrea de les bases

Com que les cares laterals són rectangles no hi haurà cap problema per calcular l'àrea lateral. Si la base és un polígon regular, totes les cares laterals seran iguals; però si no és així, s'haurà de calcular una per una l'àrea de les cares laterals.

Per calcular el volum es multiplicarà l'àrea de la base per l'altura del prisma.

Exemple:

Troba l'àrea total i el volum d'aquest prisma regular.



A lateral: Podem considerar 6 rectangles de 2,5 x 5 cm o bé un únic rectangle de 15 x 5 cm:

$A_L = 6 \cdot 2{,}5 \cdot 5 = 15 \text{ x } 5 = 75 \text{ cm}^2$

Per calcular l'àrea de la base haurem de calcular l'apotema, a, de l'hexàgon utilitzant el teorema de Pitàgores:

$$a = \sqrt{2{,}5^2 - 1{,}25^2} = 2{,}17 \text{ cm}$$

$$A_B = \frac{perímetre \cdot apotema}{2} = \frac{6 \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}17}{2} = 16{,}275 \text{ cm}^2$$

$A_T = 75 + 2 \cdot 16{,}275 = 107{,}55 \text{ cm}^2$

Volum = V = Àrea de la base x altura = 16,275 x 5 = 81,375 cm^3

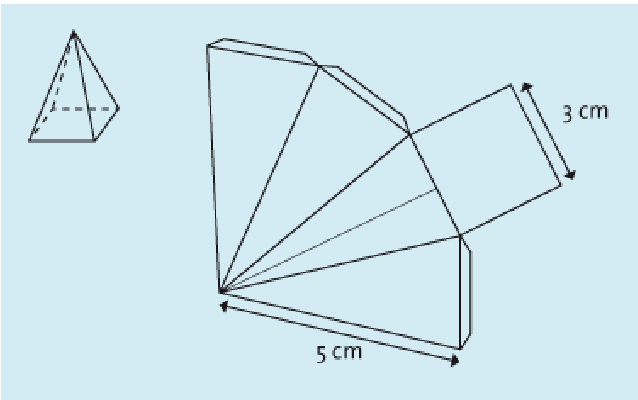
Volum d'una piràmide

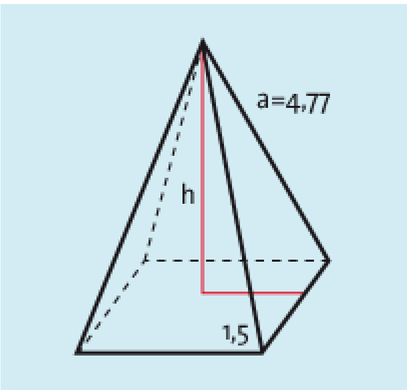
Per calcular-ne el volum, ens caldrà calcular l'altura de la piràmide, que serà la longitud de la perpendicular a la base feta des del vèrtex de la piràmide. En les piràmides regulars rectes l'altura va a parar al centre de la base.

Per calcular l'altura de la piràmide també s'haurà d'utilitzar el teorema de Pitàgores.

Exemple:

Calcularem l'altura de la piràmide de l'exemple anterior:





Per calcular l'altura de la piràmide utilitzarem el triangle rectangle format per la meitat del costat de la base, l'altura de la cara lateral calculada anteriorment i l'altura de la piràmide, que serà la hipotenusa.

Aplicant el teorema de Pitàgores tindrem:

$4{,}77^2 - (1{,}5)^2 = 20{,}5029$

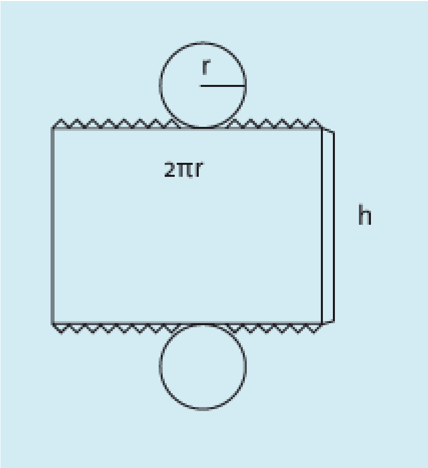
i, per tant, l'altura de la piràmide serà $\sqrt{20{,}5029} = 4{,}53$ cm, arrodonint a dos decimals.

$$\text{Volum} = \frac{A_B \cdot h}{3} = \frac{9 \cdot 4{,}53}{3} = \mathbf{13{,}59\ cm^3}$$

Àrea i volum del cilindre

El desenvolupament pla d'un cilindre és un rectangle i dues circumferències; per tant, per calcular l'àrea total haurem de sumar l'àrea del rectangle més dues vegades l'àrea del cercle que fa de base.

La longitud del costat del rectangle que està unit a les bases coincideix amb el perímetre de la circumferència:



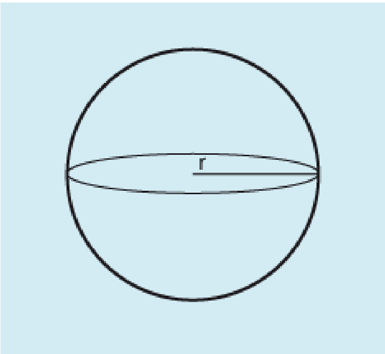
Per tant, tindrem:

Àrea lateral $A_L = 2\pi r \cdot h$
Àrea de la base $A_B = \pi r^2$
Àrea total $A_T = 2\pi r \cdot h + 2 \cdot \pi r^2$

El volum del cilindre es calcula multiplicant l'àrea de la base per l'altura del cilindre.

Volum $V = \pi r2 \cdot h$

Àrea i volum de l'esfera



L'àrea de l'esfera és $A = 4\pi r^2$ i el seu volum $V = \frac{4\pi r^3}{3}$