

U5. TEOREMA DE TALES I PITÀGORES

Motivació

El problema de l'antic Egipte: com tornar a repartir les terres.

Una combinació de trets geogràfics favorables van contribuir a l'èxit de la cultura de l'antic Egipte, el més important dels quals era el ric sòl fèrtil resultat de les inundacions anuals del riu Nil. Els antics egipcis eren així capaços de produir menjar en abundància, permetent a la població gastar més temps i recursos a passatemps culturals, tecnològics i artístics. La gestió de la terra era crucial a l'antic Egipte perquè les taxes eren assignades basant-se en la quantitat de terra que cada persona tenia.

Conrear a Egipte depenia del cicle del riu Nil. Els egipcis van establir un calendari solar que els permetia preveure les seves crescudes i van reconèixer tres estacions: Akhet (inundació), Peret (plantació) i Shemu (collita). L'estació de la inundació durava des de juny fins a setembre, i llavors es dipositava al llit del riu una capa rica en minerals ideal per a la collita. Un cop les inundacions havien retrocedit, l'estació de la plantació durava des d'octubre fins a febrer. Els pagesos llauraven i plantaven llavors als camps, els quals eren regats amb dics i canals. Egipte rebia xàfecs petits, per la qual cosa els pagesos es refiaven del Nil per regar les seves collites. Des de març fins a maig, els pagesos feien servir la falç de fusta o canya per recollir les seves collites, que llavors es batien amb un flagell per separar la palla del gra. Ventant es removia la glumel·la del gra, i el gra després es molia en farina, es fermentava per fabricar cervesa, o es guardava per fer-lo servir més tard.

Els antics egipcis cultivaven ordi i una varietat de blat, i altres grans cereals, que es feien servir per fabricar els dos aliments principals, el pa i la cervesa. Les plantes de lli, arrencades abans que comencessin a florir, eren conreades per les fibres de les seves tiges. Aquestes fibres es partien transversalment i s'enroscaven en fils, que es feien servir per teixir llençols de lli i per fabricar roba. El papir que creixia al llit del riu Nil es feia servir per fabricar paper. Les verdures i les fruites creixien en parcel·les de jardí, properes als habitatges i en un terreny elevat, i havien de regar-se a mà. Les verdures incloïen porros, alls, melons, carbassons, pèsols, llenties, enciams i altres collites, sumades al raïm del qual es feia el vi, als dàtils, les figues i les magranes.

(Text tret de la Wikipedia)

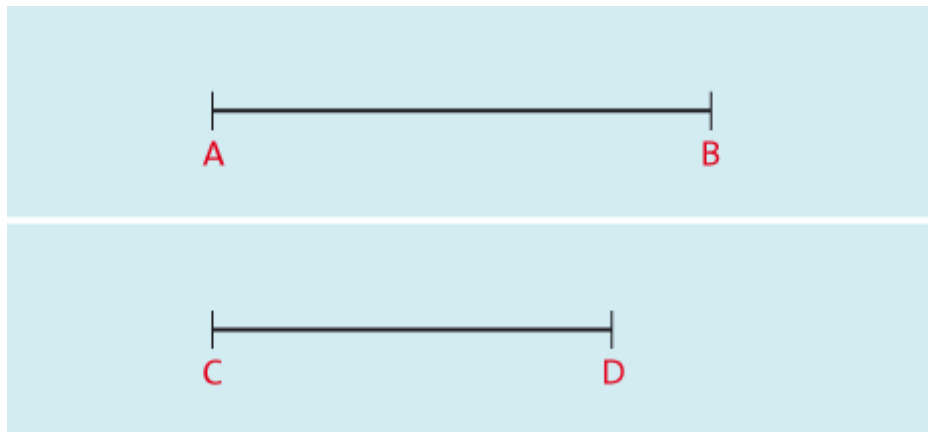


Com has vist, el que va fer prosperar Egipte van ser les inundacions periòdiques del Nil. Però això comportava un greu problema: com es podien tornar a repartir les terres de cultiu després de la inundació, que s'enduia totes les fites de cadascuna de les propietats.

Va ser el coneixement dels triangles el que va permetre resoldre aquest problema. En aquesta unitat treballarem dos teoremes de matemàtics grecs que, sens dubte, van donar forma als coneixements matemàtics d'Egipte. Aquests dos grans matemàtics, Tales de Milet i Pitàgores de Samos, grecs de naixement, es van formar com a matemàtics a Egipte

5.1. Segments

Un segment és un tros o una part d'una recta delimitat per dos punts.



Quan nosaltres dividim la longitud d'un segment AB entre la longitud d'un altre segment CD, obtenim un nombre r , que anomenarem **raó** dels dos segments:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = r \longrightarrow \text{raó dels segments}$$

[EXERCICI](#)

5.2. Segments proporcionals

Com que la mesura de la longitud d'un segment és un nombre, podem aplicar a les longituds dels segments el vocabulari que hem utilitzat per introduir el concepte de proporció entre nombres. Així, direm que els segments AB i CD són proporcionals als segments EF i GH si la raó entre AB i CD és igual a la raó entre EF i GH.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}} = r \longrightarrow \text{raó dels segments}$$

[EXERCICIS](#)

5.3. I això a la vida real?

La raó de semblança entre segments és molt útil en les representacions gràfiques d'objectes de grans dimensions. Són les escales numèriques que ja es van treballar el curs passat.

Així, en observar el plànol d'una casa trobem l'**escala numèrica** en què ha estat dibuixat, per exemple 1:75. Això vol dir que cada 1 cm del plànol equival a 75 cm de la realitat.

Per calcular, doncs, les mesures exactes d'un objecte real a partir d'una reproducció seva a escala, s'ha d'aplicar la proporcionalitat de segments.

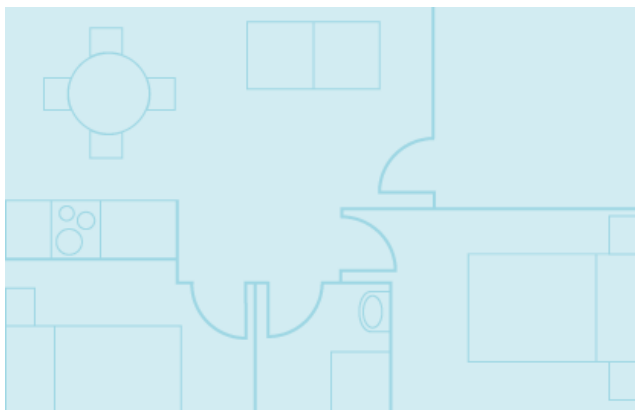
Per exemple, podem calcular la mida real d'una paret que en el plànol mesura 6 cm:

$$\frac{1}{75} = \frac{6}{x} \quad x = 6 \cdot 75 = 450 \text{ cm; o sigui: 4,5 metres}$$

Si nosaltres volem fer un dibuix a escala també utilitzarem les proporcions per calcular la mida que en el dibuix correspon a una mida real.

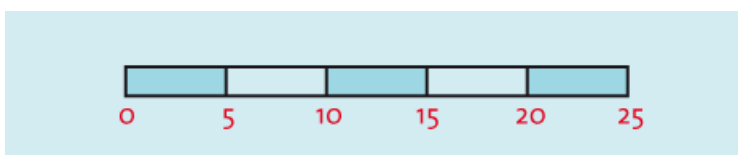
Si, per exemple, hem de dibuixar un llit que mesura 2 metres de llargada:

$$\frac{1}{75} = \frac{x}{200}; \text{ i d'aquí: } x = \frac{200}{75} = 2,6 \text{ cm}$$



En el dibuix, haurem de representar un llit de 2,6 cm.

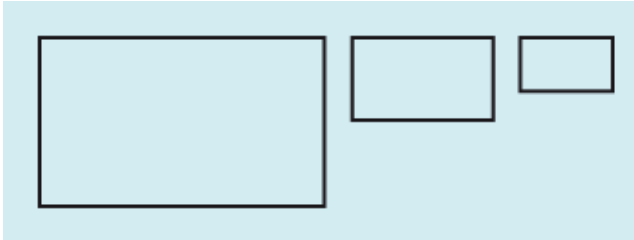
A banda de donar informació de l'escala en forma numèrica, hi ha la possibilitat d'informar de l'escala de forma gràfica. Són les escales gràfiques que sovint apareixen en els mapes. Consisteixen en un rectangle dividit en 5 rectangles d'un cm d'amplada i amb una indicació numèrica de l'equivalència a la realitat:



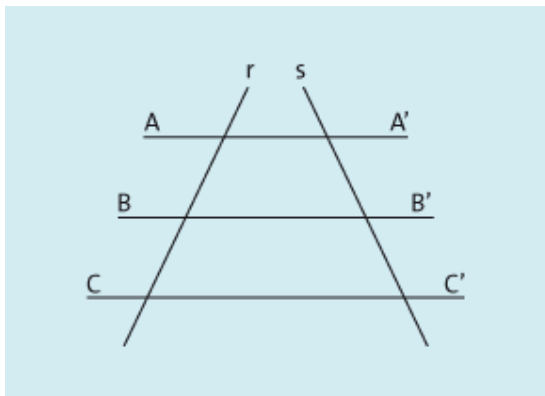
Segons aquesta escala: 1 cm del plànol, equival a 5 m de la realitat, i 5 cm del plànol a 25 m de la realitat. [EXERCICIS](#)

5. 4. Teorema de Tales

Observa aquestes figures: no són iguals, però s'assemblen les unes a les altres i diem que són semblants. Quina relació hi ha entre elles? La resposta a aquesta pregunta és una part de la geometria: l'estudi de les semblances. El seu fonament és la proporcionalitat de segments, i en l'inici d'aquesta teoria es troba un gran matemàtic de l'antiguitat: Tales de Milet, que va viure fa uns dos mil cinc-cents anys.



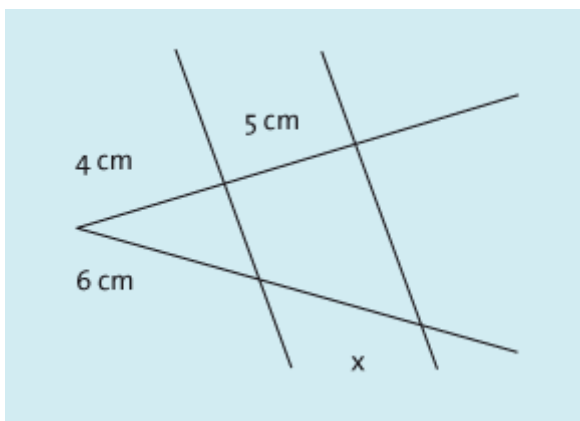
Si tres rectes paral·leles, a , b i c , tallen dues rectes, r i s , els segments que hi determinen són proporcionals.



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

Exemple de com s'aplica.

Calcula la longitud del segment desconegut:



$$\frac{4}{6} = \frac{5}{x}, \text{ i per tant } 4x = 30 \text{ i } x = 7,5$$

[EXERCICI](#)

5.5. Aplicacions del Teorema de Tales

En principi el Teorema de Tales sembla que no es pugui aplicar gaire a la vida real, però podràs veure que realment és molt útil. Per començar mirarem dues aplicacions que més endavant emprarem en situacions de la vida ordinària.

➕ [5.5.1. Divisió d'un segment en parts proporcionals a uns segments donats](#)

➕ [5.5.2. Divisió d'un segment en parts iguals](#)

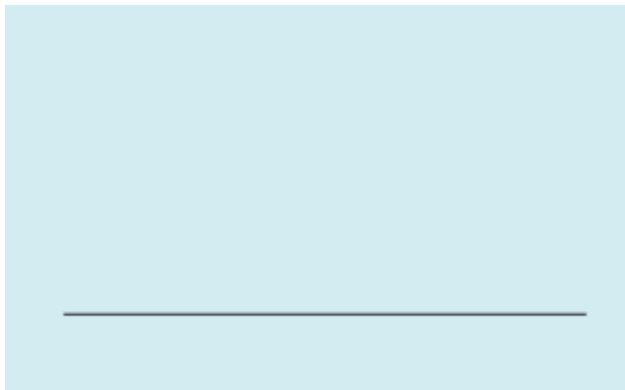
➕ [5.5.3. Ampliació o reducció d'una figura](#)

➕ [5.5.4. Juguem amb les proporcions](#)

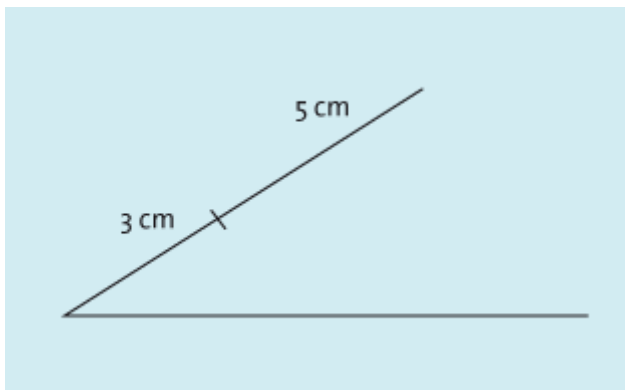
5.5.1. Divisió d'un segment en parts proporcionals a uns segments donats

Per dividir un segment de 10 cm en dues parts proporcionals a 3 i 5 seguirem els passos següents:

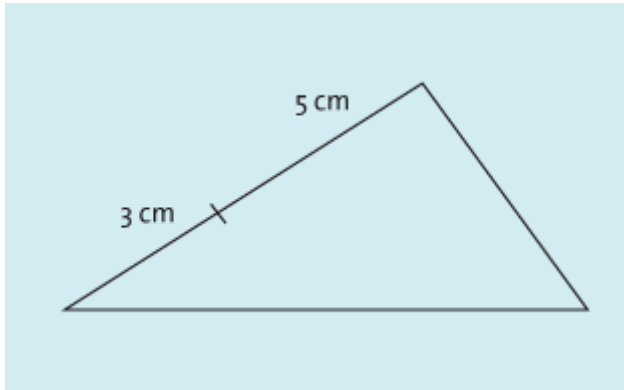
1. Dibuixem el nostre segment:



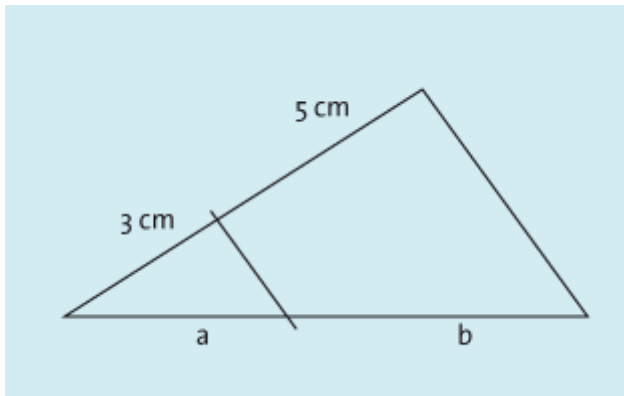
2. Dibuixem, des d'un dels extrems, una semirecta en la qual situem consecutivament dos segments de 3 i 5 cm.



3. Unim l'extrem de la semirecta feta amb l'extrem lliure del segment inicial.



4. Des del punt on acaba el primer segment, tracem una paral·lela.



5. Els segments a i b que han quedat definits damunt de la recta original, són proporcionals a 3 i 5 respectivament.

[EXERCICI](#)

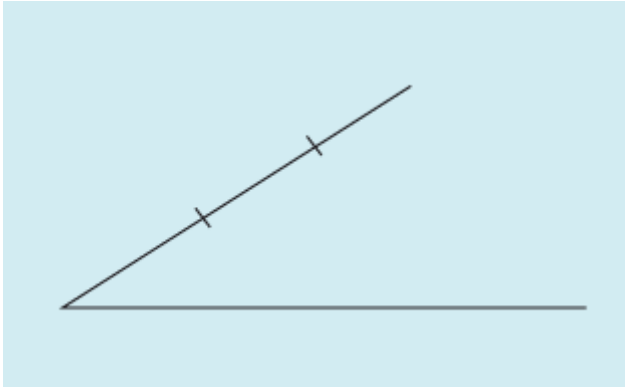
5.5.2. Divisió d'un segment en parts iguals

Per dividir un segment de 10 cm en 3 parts iguals seguirem un procediment semblant.

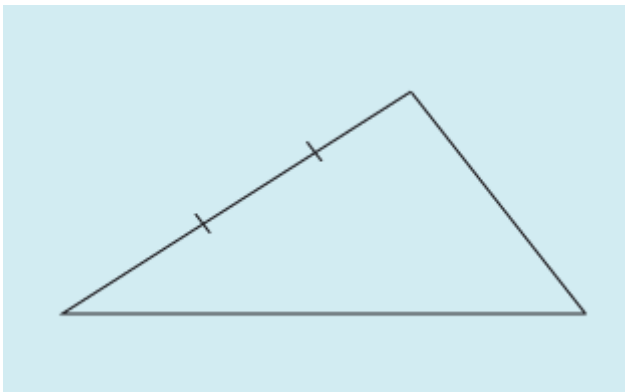
a) Dibuixem el nostre segment.



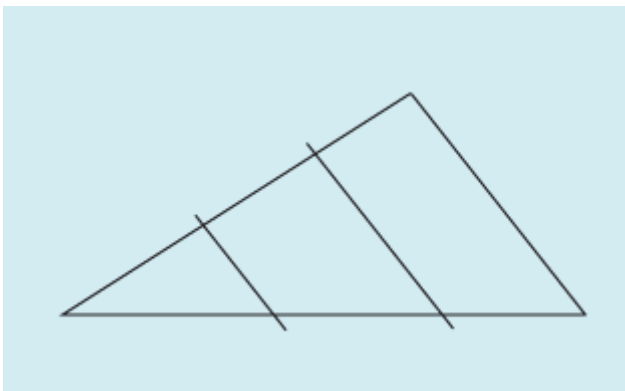
b) Dibuixem, des d'un dels extrems, una semirecta auxiliar en la qual situem consecutivament tres segments iguals.



c) Unim l'extrem de la semirecta auxiliar amb l'extrem lliure del segment inicial.



d) Per acabar, fem paral·leles des d'un segment a l'altre.



D'aquesta forma el segment de 10 cm queda dividit en tres parts iguals.

🔗 [EXERCICIS](#)

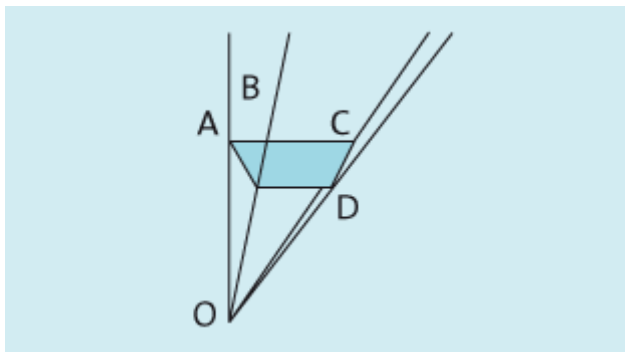
5.5.3. Ampliació o reducció d'una figura

A partir d'una figura determinada, es poden fer ampliacions o reduccions seves de la mida que es vulgui.

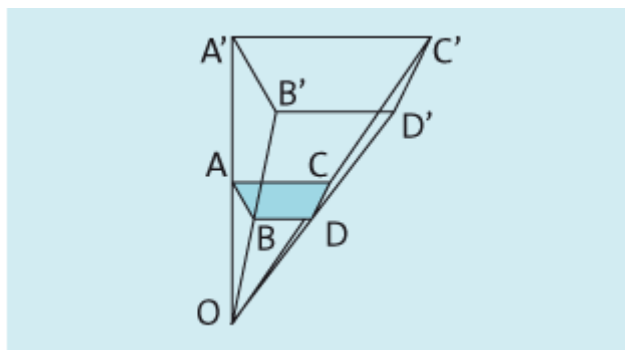
Exemple

Amplia al doble aquesta figura.

Per fer-ho escollim un punt qualsevol, O, des del qual tracem rectes fins als vèrtexs del polígon i les prolonguem una mica:

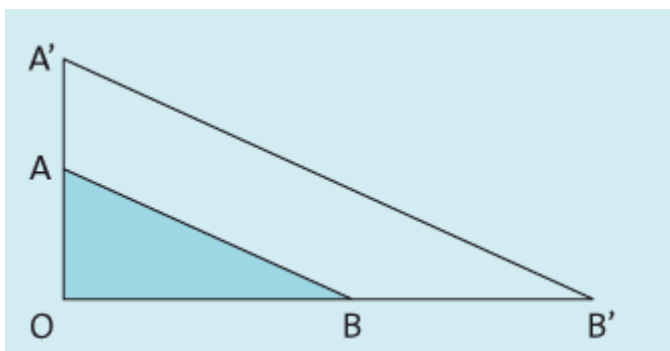


Amb l'ajuda d'un compàs marquem sobre les rectes dibuixades segments iguals als segments OA, OB, OC i OD, obtenint els punts A', B', C' i D'.

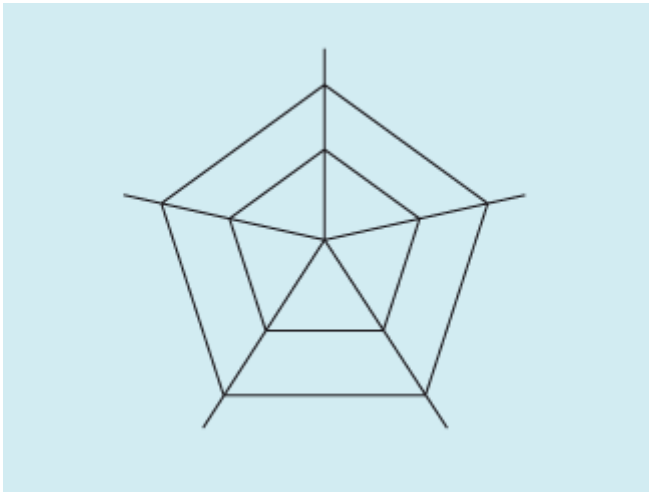


Els costats del trapecí A'B'C'D' mesuren el doble dels costats del trapecí original.

També es pot fer agafant com a punt O un vèrtex de la figura, com hem fet en aquesta figura per ampliar el triangle rectangle.

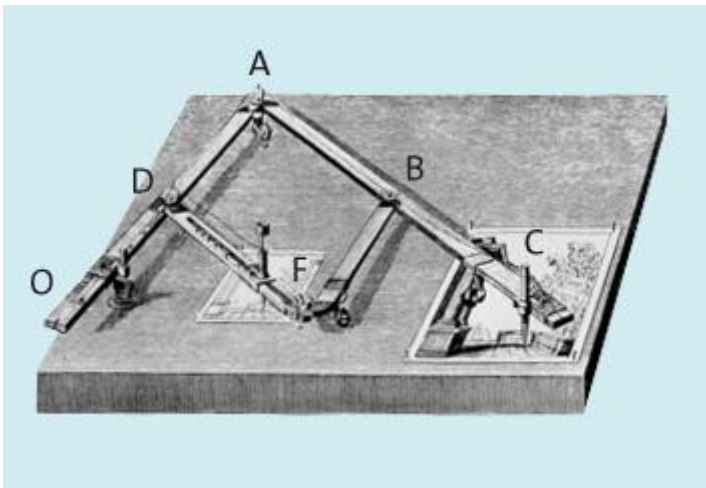


Una tercera opció seria situar el punt O a l'interior de la figura com es pot veure en aquesta figura.



5.5.4. Juguem amb les proporcions

Sabeu què és això?



S'anomena **pantògraf** i és un instrument que serveix per copiar (ampliant o reduint a voluntat) un plànol, un mapa, o bé, en general, un dibuix qualsevol. Està format, essencialment, per quatre regles articulats formant ballesta. Un dels regles té un punt que roman fix durant el treball, un altre regle està proveït d'un estilet amb el qual hom ressegueix el dibuix original que vol copiar, i un altre regle té un llapis que va dibuixant la còpia de l'original.

Per fer un pantògraf necessitem 4 llistons i muntar-los com s'observa a la figura. Els punts O, F i C s'ha de procurar que estiguin alineats.

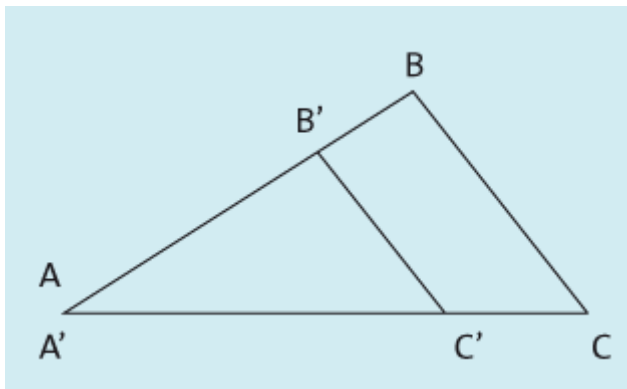
Si volem fer una reducció, fixem el punt O en el paper i en anar resseguint la figura amb la punta del punt C el punt F dibuixarà la figura reduïda; i si volem fer una ampliació, hem de situar el dibuix original en el punt F i el llapis situat a C dibuixarà l'ampliació.

La raó de semblança que estem utilitzant és $\frac{\overline{OF}}{\overline{OC}}$

[EXERCICI](#)

5.6. Triangles en posició de Tales

Dos triangles que tinguin tots els seus angles iguals es poden posar en posició de Tales. Per fer-ho n'hi haurà prou de fer coincidir dos angles iguals. Llavors els tercers costats seran paral·lels i tindrem dues rectes que tallen un sistema de rectes paral·leles:



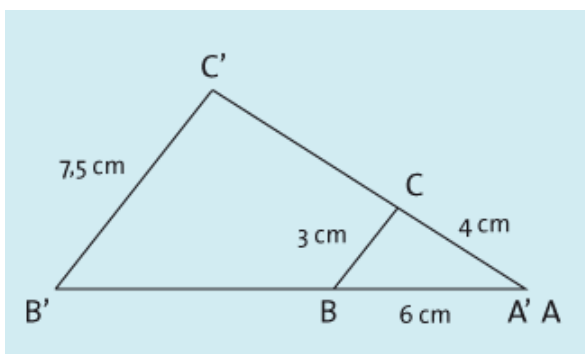
Els triangles ABC i A'B'C' estan en posició de Tales.

En aquesta situació, els costats dels triangles són proporcionals dos a dos.

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

Exemple

Troba els costats A'C' i A'B' del triangle A'B'C':



$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{C'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \overline{A'C'} = \frac{4 \cdot 7,5}{3} = 10 \text{ cm}$$

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'B'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{6}{3} \Rightarrow \overline{A'B'} = \frac{6 \cdot 7,5}{3} = 15 \text{ cm}$$

[EXERCICI](#)

5. 7. I a la vida de cada dia?

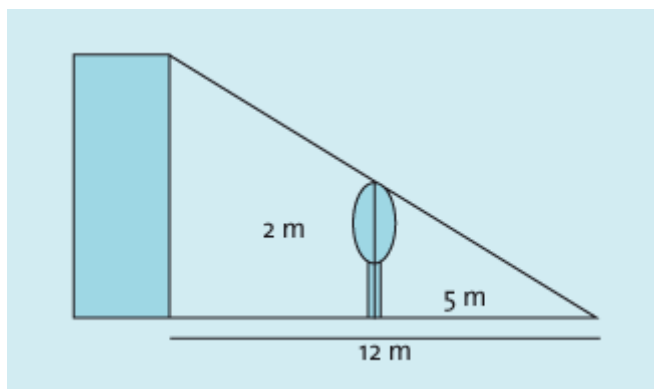
Per poder aplicar el teorema de Tales a la vida real s'ha d'intentar transformar la situació real en un model matemàtic en el qual es vegi la presència de triangles situats en la posició del Teorema de Tales.

Els passos a seguir són els següents:

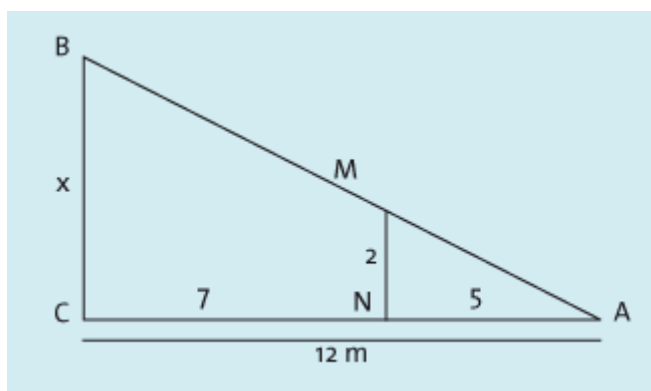
1. Fer una figura que representi amb triangles la situació real a estudiar.
2. Localitzar triangles situats en la posició del Teorema de Tales.
3. A partir de la informació continguda a l'enunciat anotar les mides conegudes sobre la figura dibuixada.
4. Assignar les lletres variables x , y , a les mides desconegudes en la figura.
5. Relacionar utilitzant el Teorema de Tales els valors coneguts i els desconeguts, representats per una lletra.
6. Aplicar el Teorema de Tales per calcular les mides desconegudes.

Exemple

Des d'un punt de terra situat a 12 m de la paret d'un edifici i a 5 m d'un arbre de dos metres d'alçada, veiem en línia la capçada d'un arbre i la punta de l'edifici tal com es pot veure a la figura adjunta. Calcula l'alçada de l'edifici.



Aquesta figura es pot esquematitzar com:



Els triangles ABC i AMN estan en posició de Tales i podem escriure:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{MN}{AN} \text{ i per tant } \frac{x}{12} = \frac{2}{5}$$

Que ens porta a $5x = 24$

$$x = \frac{24}{5} = 4,8$$

En conseqüència l'edifici mesura 4,8 m d'alçada.

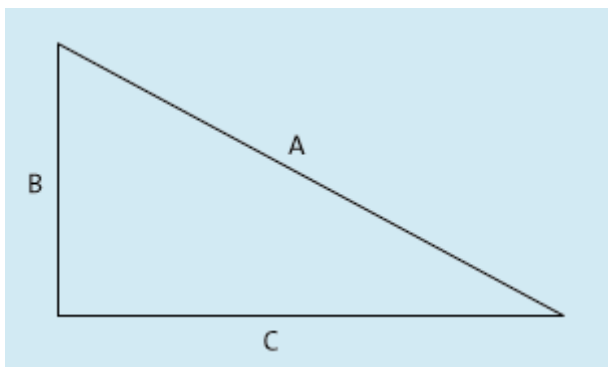
📄 [EXERCICIS](#)

5.8. Teorema de Pitàgores

El **Teorema de Pitàgores** relaciona els catets i la hipotenusa d'un triangle rectangle.

Un dels altres grans matemàtics grecs va ser Pitàgores, fundador de l'escola Pitagòrica. A ell, o a la seva escola, devem un teorema importantíssim. Ens permet calcular distàncies entre punts que no podem unir per una línia recta.

Pitàgores treballa en triangles rectangles, triangles que, com ja saps, tenen un angle recte. Els dos costats que formen l'angle recte són els catets, *b* i *c* a la figura, i l'altre costat és la hipotenusa, representat per *a* a la figura. Les paraules *catet* i *hipotenusa* tenen el seu origen etimològic en el grec. *Catet* prové de la paraula *kathetos*, que deriva de *kothos* (recte o conforme) i significa «perpendicular». *Hipotenusa* prové del grec *upoteinousa*, que significa «la línia que sosté».



La versió més coneguda del Teorema de Pitàgores diu el següent:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

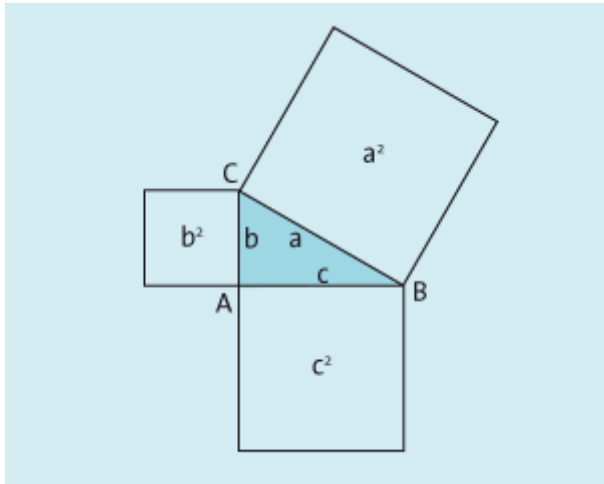
Però, en la versió més genuïna, el Teorema de Pitàgores té el següent enunciat:

Donat un triangle de vèrtex ABC, l'angle A és recte (triangle rectangle) si i només si l'àrea del quadrat sobre el costat a, oposat a A, és la suma de les àrees dels quadrats sobre els altres costats b i c: $a^2 = b^2 + c^2$.

L'expressió que hem utilitzat: si i només si, vol dir que si un triangle és rectangle es verifica que $a^2 = b^2 + c^2$, i que si en un triangle se satisfà aquesta igualtat llavors aquell triangle és rectangle. En altres paraules, aquesta propietat només la tenen els triangles rectangles.

El teorema servia en primer lloc per calcular perpendicularitats. Imaginem un arquitecte grec que es disposava a comprovar si dues parets eren perpendiculars. En aquelles èpoques era complicat mesurar els angles; per tant, amb una corda en la qual havia fet nusos equidistants, marcava 3 nusos en una paret i 4 en l'altre, i després tensava la corda des d'un dels punts fins a l'altre. Les parets eren perpendiculars si entre un punt i un altre, hi havia una distància de 5 nusos.

El teorema també servia per resoldre gràficament el següent problema: donats dos quadrats, dibuixar un tercer quadrat l'àrea del qual sigui la suma de les àrees dels altres dos.



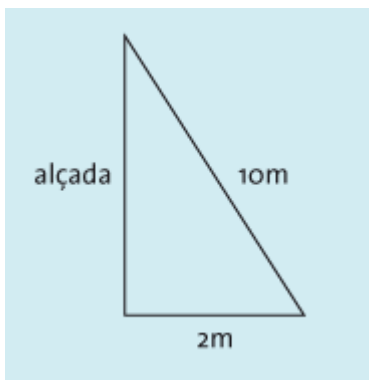
Actualment, el Teorema de Pitàgores és un dels més utilitzats per resoldre problemes geomètrics.

5.9. Com utilitzar el teorema de Pitàgores

El procés a seguir és el següent:

- 1) Dibuixar la situació plantejada.
- 2) Identificar un triangle rectangle en el qual intervé la mesura que volem calcular.
- 3) Observar si es coneixen les mesures de dos dels altres costats del triangle.
- 4) Aplicar el Teorema de Pitàgores per calcular la mesura desconeguda.

Exemple: Calcula la mesura de l'alçada de la vela d'un vaixell.



$$\text{Alçada}^2 + 2^2 = 10^2$$

$$100 - 4 = x^2$$

$$96 = x^2$$

$$x = \sqrt{96} = 9,80 \text{ m}$$

🔗 [EXERCICIS](#)