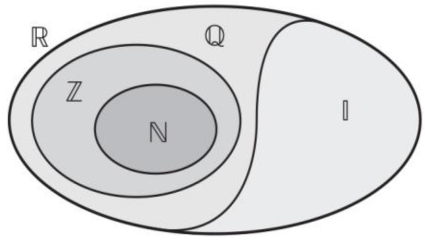
Nom: .... Data: ....

Els nombres reals

- Els **nombres reals** ($\mathbb{R}$) estan constituïts per la reunió de diversos conjunts numèrics. Els **racionals** ($\mathbb{Q}$) corresponen a tots aquells nombres que es poden expressar com a nombres decimals, al contrari que els **irracionals** ($\mathbb{I}$).
- La unió dels nombres racionals i irracionals dóna lloc als nombres reals ($\mathbb{R}$): $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.
- Qualsevol conjunt numèric es representa sobre la seva recta numèrica corresponent.
- Tota fracció origina un nombre decimal ($\frac{7}{9} = 0{,}777...$), però no tot decimal es pot convertir en fracció ($\sqrt{2} = 1{,}41421...$). Aquest és el cas dels nombres irracionals.



1 Observa aquest esquema en el qual s'explica l'obtenció de la fracció generatriu de nombres decimals:

Nombre decimal exacte	Decimal periòdic pur	Decimal periòdic mixt
$4{,}25$	$2{,}\widehat{57}$	$10{,}06\widehat{3}$
$F = 4{,}25 = \frac{425}{100} = \frac{17}{4}$	$F = 2{,}\widehat{57}$; $100F = 257{,}\widehat{57}$ $100F - F = 257{,}\widehat{57} - 2{,}\widehat{57} = 255$ $99F = 255$ $F = \frac{255}{99} = \frac{85}{33}$	$F = 10{,}06\widehat{3}$; $100F = 1006{,}\widehat{3}$ $1\,000F = 10\,063{,}\widehat{3}$ $1\,000F - 100F = 10\,063{,}\widehat{3} - 1\,006{,}\widehat{3}$ $900F = 9\,057$ $F = \frac{9\,057}{900} = \frac{3\,019}{300}$

Troba la fracció generatriu dels nombres decimals següents:

a) $7{,}72$ c) $0{,}\widehat{564}$ e) $1{,}67\widehat{8}$

b) $0{,}555$ d) $3{,}\widehat{49}$ f) $0{,}5\widehat{84}$

2 Amb l'ajuda d'una calculadora, busca el valor de les arrels quadrades següents. En quins casos s'obtenen nombres irracionals?

a) $\sqrt{144}$ c) $\sqrt{441}$ e) $\sqrt{98}$

b) $\sqrt{3}$ d) $\sqrt{24}$ f) $\sqrt{109}$

3 Busca tres nombres irracionals compresos entre 3 i 4.

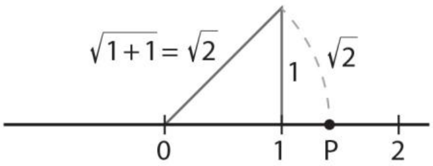
4 Ordena de més gran a més petit aquests nombres reals: $3{,}2$; $\sqrt{5}$; π; $3{,}\widehat{2}$; $\sqrt{17} - 1$; $2 + \sqrt{2}$; $\frac{13}{4}$.

Nom: .... Data: ....

Representació gràfica de nombres irracionals

- Els **nombres irracionals** no es representen directament sobre la recta numèrica, ja que se'n desconeix el valor exacte. Per a fer-ho, s'utilitza una **representació geomètrica** basada en el teorema de Pitàgores.
- Per a representar el nombre irracional $\sqrt{2}$, es fa servir la igualtat $\sqrt{2}=\sqrt{1^2+1^2}$, on *P* representa la posició de $\sqrt{2}$:

  $1<\sqrt{2}<2 \rightarrow 1<1{,}414213\ldots<2$



- En general, de **dos nombres irracionals és més gran** el que està situat **més a la dreta** de la recta numèrica. Entre dos nombres irracionals situats en la recta numèrica, hi ha nombres irracionals il·limitats.

1 Indica entre quins nombres naturals es troben els nombres irracionals següents:

a) $\sqrt{250}$ b) $\sqrt{1000}$ c) $\sqrt[3]{32}$ d) $\sqrt{2000}$

2 Indica entre quins nombres decimals (fins a les dècimes) es troben els valors següents:

a) Nombre π c) $\sqrt{17}$ e) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

b) $\sqrt{7}$ d) $\sqrt{99}$ f) $\sqrt[3]{68}$

3 Representa geomètricament el nombre irracional $\sqrt{5}$. (Recorda que $\sqrt{5}=\sqrt{2^2+1^2}$)

4 Representa geomètricament el nombre irracional $\sqrt{17}$.

5 Representa geomètricament el nombre irracional $\sqrt{7}$. Observa que $\sqrt{7}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+2^2}$.

6 A partir de la representació gràfica de $\sqrt{2}$ representa en una mateixa recta numèrica els nombres irracionals següents: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$.

Nom: .... Data: ....

Aproximacions de nombres reals

- **Aproximar** un nombre consisteix a trobar un **valor proper** al seu valor original. Una aproximació és per **defecte** si és **inferior** al seu valor original; una aproximació és per **excés** si és **superior** al seu valor original: 5,3678 → 5,36 (per defecte) / 5,3678 → 5,37 (per excés).
- **Arrodonir** un nombre consisteix a dur a terme una **aproximació** seguint aquestes pautes:
  — Si la darrera xifra que s'ha de suprimir és **inferior a 5**, es **conserva el valor** de la xifra anterior (aproximació per defecte): 3,0839 (a centèsimes) → 3,08.
  — Si la darrera xifra que s'ha de suprimir és **superior o igual a 5**, el valor de la xifra anterior **augmenta una unitat** (aproximació per excés): 0,7684 (a dècimes) → 0,8.
- **Truncar** un nombre consisteix a dur a terme una aproximació **interrompent-lo** en una posició determinada (aproximació per defecte): 7,034861 (a mil·lèsimes) → 7,034.
- Les **xifres significatives** d'un nombre real són aquelles que es tenen en compte. La darrera correspon al seu **ordre d'aproximació:** 4,6549156… (a deumil·lèsimes) → 4,6549 (quatre xifres significatives).

1 Escriu tres aproximacions per excés i tres aproximacions per defecte del nombre irracional $\sqrt{22}$.

2 Indica en cada cas el tipus d'aproximació que s'ha aplicat.

a) 0,6438 → 0,64
c) 12,07632 → 12,1
e) 5,234899 → 5,2348
b) 9,998 → 10
d) 9,998 → 9,99
f) 0,11845 → 0,12

3 Escriu les aproximacions següents:

a) Una per defecte fins a les mil·lèsimes de $\sqrt{56}$.
b) Una per excés fins a les deumil·lèsimes de 7,23696969….
c) Una per defecte fins a les centèsimes de $\sqrt{77}$.

4 Completa aquesta taula:

Nombre	Arrodoniment a les centèsimes	Truncament a centèsimes	Aproximació per defecte a dècimes	Aproximació per excés a mil·lèsimes
4,398764				
10,04512343…				
0,874981…				

5 Del nombre 6,0436819 escriu una aproximació:

a) Per defecte amb tres xifres significatives.
b) Per excés amb dues xifres significatives.
c) Per defecte amb quatre xifres significatives.
d) Per excés amb una xifra significativa.

Nom: .... Data: ....

Errors en les aproximacions de nombres reals

- L'**error absolut** (E_a) d'una aproximació equival al valor absolut de la diferència entre els seus valors exacte i aproximat: E_a = **|valor exacte – valor aproximat|**.
- L'**error relatiu** (E_r) és el quocient entre l'error absolut (E_a) i el valor exacte: $E_r = \dfrac{E_a}{\text{valor exacte}}$.
- L'error relatiu es pot expressar en forma **percentual: Er · 100 (%)**.
- La **cota d'error** és el valor màxim de l'error comès.

1 S'ha cronometrat el temps equivalent a un minut i s'han obtingut els mesuraments següents en segons: 59 s, 59,6 s i 60,2 s. Amb aquestes dades, completa la taula següent:

Mesurament (s)	Valor exacte	Error absolut	Error relatiu	Error percentual
59				
59,6				
60,2				

2 El valor del nombre π ha tingut diverses aproximacions al llarg de la història. Calcula l'error relatiu dels casos següents considerant que el seu valor exacte sigui 3,1415926.

a) $\dfrac{256}{81}$ (antic Egipte).

b) 3,125 (antiga Mesopotàmia).

c) $\sqrt{10}$ (Índia).

3 Els catets d'un triangle rectangle mesuren 4 cm i 6 cm, respectivament. Si es considera una hipotenusa de 7,2 cm, calcula l'error percentual que s'ha comès.

4 Un metre quadrat de paper per a fer fulls DIN A3 (42 cm x 29,7 cm) pesa 80 g.

a) Quant deuen pesar 100 d'aquests fulls?

b) Calcula l'error relatiu que es comet si el pes anterior s'aproxima a 1 kg.

5 El nombre d'or (ϕ) equival a 1,618033988… Si l'aproximem a 1,62, l'error absolut és 0,001966…, és a dir, inferior a una centèsima, per tant, la cota d'error és 0,01. D'acord amb aquesta pauta, calcula la cota d'error en els casos següents:

a) $\sqrt{60} \simeq 7{,}75$ b) $\sqrt{146} \simeq 12$ c) $(15{,}7 \pm 0{,}1)$ cm

6 Una balança de cuina aprecia un pes mínim de 5 g. Si s'han pesat 180 g de farina, entre quins dos pesos reals deu estar probablement aquest mesurament?

Nom: .... Data: ....

Potències de base real

Potències de base real i exponent enter o racional	$a^n = a \cdot a \cdot a \ldots . \cdot a \rightarrow$ (n vegades)	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$
Multiplicació de potències de la mateixa base	**Divisió de potències de la mateixa base**	**Potència d'una potència**
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a^m : a^n = a^{m-n}$	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
Potències d'exponent 0 i 1	**Potència d'una multiplicació**	**Potència d'una divisió**
$a^0 = 1 \qquad a^1 = a$	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(a : b)^n = a^n : b^n$
Notació científica	Utilitza l'expressió $\boldsymbol{n \cdot 10^k}$, on $\boldsymbol{n}$ és un nombre decimal la part entera del qual només té una xifra distinta de zero, i $\boldsymbol{k}$ és un nombre enter: **1,53 · 10⁷ … 2,0678 · 10⁻⁴.**	

1 Calcula:

a) $\left(\frac{5}{2}\right)^3$ c) $\left(\frac{5}{2}\right)^{-3}$ e) $\left(\frac{-7}{3}\right)^{-2}$

b) $\left(\frac{-6}{5}\right)^2$ d) $\left(\frac{-2}{7}\right)^{-1}$ f) $\left(\frac{-3}{2}\right)^{-4}$

2 Expressa en forma d'una sola potència d'exponent positiu:

a) $\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-6}$ c) $\left(\frac{-10}{7}\right)^4 : \left(\frac{-10}{7}\right)^7$ e) $\left[\left(\frac{-5}{7}\right)^4\right]^{-2}$

b) $\left(\frac{-11}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{-11}{4}\right)^{-9} \cdot \left(\frac{-11}{4}\right)$ d) $\dfrac{\left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{-8} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{-3}}{\left[\left(\frac{5}{4}\right)^3\right]^{-2}}$ f) $\left(\frac{-1}{6}\right)^4 : \left(\frac{-1}{6}\right)^7 \cdot \left(\frac{-1}{6}\right)^{-1}$

3 Expressa en forma d'una sola potència d'exponent positiu:

a) $\left[\frac{2}{9} \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)^{-4}\right]^2$ c) $\left[\left(\frac{-11}{3}\right)^2 : \frac{5}{6}\right]^{-3}$ e) $\left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{-1} : \left(\frac{6}{7}\right)^3\right]^{-5}$

4 Expressa en notació científica:

a) 120 000 c) 0,0256 e) 34 500 000 000

b) 0,001 d) 58 123 f) 0,0000069

5 Expressa en notació decimal:

a) $2,05 \cdot 10^4$ c) $7,2 \cdot 10^{-3}$ e) $1,24 \cdot 10^7$

b) $7,1 \cdot 10^{-2}$ d) $4,58679 \cdot 10^5$ f) $9,034 \cdot 10^{-5}$

Nom: .... Data: ....

Radicals

Arrel enèsima d'un nombre real

- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, on ***n*** un nombre natural positiu i ***m*** és un nombre enter.
- Si ***n*** és imparell, hi ha **una única arrel** amb el **mateix signe** que el radicand.
- Si ***n*** és parell i el radicand és positiu, hi ha **dues arrels reals i oposades.**
- Si ***n*** és parell i el radicand és negatiu, **no hi ha** arrels reals.

Radicals semblants

- Són **semblants** si tenen el mateix índex i radicand → $2\sqrt[4]{5}$ i $-3\sqrt[4]{5}$.
- Dos radicals poden ser semblants si es redueixen a **índex comú** amb el m.c.m. de tots els índexs: $\sqrt{6}, \sqrt[3]{4} \quad \rightarrow \quad \sqrt[6]{6^3}, \sqrt[6]{4^2}$

Operacions amb radicals

- Suma i/o resta: Els radicals han de ser **semblants** → $a\sqrt[n]{x} \pm b\sqrt[n]{x} = (a \pm b)\sqrt[n]{x}$
- Multiplicació i/o divisió: Els radicals només han de tenir **el mateix índex.**

$$a\sqrt[n]{x} \cdot b\sqrt[n]{y} = (a \cdot b)\sqrt[n]{(x \cdot y)} \qquad a\sqrt[n]{x} : b\sqrt[n]{y} = \left(\frac{a}{b}\right)\sqrt[n]{\left(\frac{x}{y}\right)}$$

- Potència/arrel d'un radical: $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m} \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n \cdot m]{x}$.
- Racionalització: Consisteix a trobar una expressió equivalent **sense radicals** en el denominador.

1 Calcula les arrels següents si és que existeixen:

a) $\sqrt{64}$ c) $\sqrt{-36}$ e) $\sqrt[3]{-27} =$ g) $\sqrt[5]{243}$

b) $\sqrt[6]{729}$ d) $\sqrt[4]{10\,000}$ f) $\sqrt[4]{-256}$ h) $\sqrt[7]{-1}$

2 Expressa en forma de potència d'exponent racional:

a) $\sqrt[4]{8}$ b) $\sqrt[9]{5^3}$ c) $\sqrt[12]{\left(\frac{-4}{5}\right)^6}$ d) $\sqrt[3]{\left(\frac{2}{7}\right)^2}$

3 Comprova si aquests radicals són semblants:

a) $\sqrt{8}, \sqrt[8]{4096}$ b) $\sqrt[4]{288}, \sqrt{72}$ c) $\sqrt[6]{128}, \sqrt{32}$ d) $\sqrt{100}, \sqrt[3]{1000}$

4 Redueix a índex comú:

a) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}$ b) $\sqrt[3]{10}, \sqrt[6]{20}$ c) $\sqrt[5]{2}, \sqrt{5}, \sqrt[20]{3}$ d) $\sqrt[3]{x^2}, \sqrt[4]{x}, \sqrt[6]{x^5}$

5 Calcula simplificant tot el que puguis:

a) $3\sqrt{18} + 2\sqrt{50} - 5\sqrt{2} =$ c) $\sqrt[8]{6} : \sqrt[4]{4} =$ e) $\sqrt{\sqrt[3]{64}} =$

b) $2\sqrt{50} \cdot 3\sqrt[3]{4} =$ d) $\dfrac{2 - 3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} =$ f) $\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{\sqrt{6} - \sqrt{3}} =$

Nom: .... Data: ....

Logaritmes

- En general, n és el **logaritme** de a en base b ($n = \log_a b$) si $a^n = b$, per a, b, n nombres reals ($a, b > 0$, i $a \neq 1$).
- Si la **base és 10,** se n'omet l'escriptura: $\log_{10} x = \log x$. Si la **base** és el nombre irracional e, s'expressa com a (ln): $\log_e x = \ln x$.
- Canvi de base logarítmica: $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$; on a, b, x són nombres reals positius ($a, b \neq 1$).

Propietats dels logaritmes

- Logaritme d'un producte: $\log_a (x \cdot y) = \log_a + \log_a y$
- Logaritme d'un quocient: $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_b y$
- Logaritme d'una potència: $\log_a (xy) = y \cdot \log_a x$
- Logaritme d'una arrel: $\log_a \sqrt[n]{x} = \dfrac{\log_a x}{n}$

1 Calcula els logaritmes següents:

a) $\log 100\,000$ d) $\log_{13} 1$ g) $\text{lob}_6\ 125$

b) $\log_2 128$ e) $\log_3 81$ h) $\log_8 64$

c) $\ln e$ f) $\log_6 36$ f) $\log 0{,}01$

2 Amb l'ajuda de la calculadora i mitjançant el canvi de base, calcula els logaritmes següents:

a) $\log_5 7$ c) $\log_6 1\,000$ e) $\log_2\ 44$

b) $\log e$ d) $\log_{32} 8$ f) $\ln 581$

3 Calcula aplicant les propietats dels logaritmes:

a) $\log_2 8 + \log_2 \left(\dfrac{1}{4}\right)$

b) $\log 810 - \log \sqrt[5]{\dfrac{1}{9}} =$ (per a $\log 3 \approx 0{,}477$)

c) $\log_2 \sqrt[5]{2} - \log_2 4$

d) $\ln 1 + \ln e - \ln \left(\dfrac{1}{e}\right)$

e) $\log \sqrt[5]{0{,}04} - \log \sqrt{0{,}32} =$ (per a $\log 2 \approx 0{,}301$)

f) $\log_x x \sqrt[5]{x} + \log_x \left(\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\right)$

4 Desenvolupa les expressions logarítmiques següents:

a) $\log_x \left(\dfrac{a \cdot b}{c}\right)$

b) $\log_z \left(\dfrac{a}{b}\right)^3$

c) $\log_y \left(\dfrac{a^3 \cdot b}{\sqrt{c}}\right)$

d) $\log_b \left(\dfrac{x^2 y}{z^3}\right)$

5 Expressa en forma d'un únic logaritme:

a) $2\log \left(\dfrac{x}{y}\right) - \log (xy)$

b) $\dfrac{1}{3} \cdot \log_5 x - 2\log_5 x + (x-2) \cdot \log_5 7$

Nom: .... Data: ....

Percentatges

- En general, ***a*** és el ***x*** **%** de ***b*** si es compleix que: $a = \frac{b \cdot x}{100}$; paralelamente, ***x*** es el **tanto por uno** de ***a*** respecto de ***b*** si se cumple que: $a = b \cdot x$.
- Augment/disminució percentual: $c \pm x\%$ de $c = c \cdot \left(1 \pm \frac{x}{100}\right)$, on $\left(1 \pm \frac{x}{100}\right)$ són els **índexs de variació percentual.**
- **Interès simple (I):** Els interessos es calculen sobre el **capital inicial (*C*)** sotmès a un **rèdit** percentual **(*r*)**, a partir d'un **temps (*t*)** mesurat en anys → $I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$
- **Interès compost (I):** Els interessos es calculen sobre el **capital acumulat progressivament (C_i)** sotmès a un **rèdit (*r*)** en tant per u, a partir d'un **temps (*t*)** mesurat en **anys,** amb la qual cosa s'obté un **capital final** **(C_f)** → $C_f = C_i \cdot (1 + r)^t$, on $I = C_f - C_i$.

1 Calcula quin percentatge representa la primera quantitat respecte de la segona:

a) 34, 45
b) 98, 99
c) 122, 290
d) 2, 101
e) 1198, 999
f) 2 222, 3 333

2 Calcula l'augment o la disminució percentual que representa la primera quantitat respecte de la segona:

a 23 → 18,4
b) 18,4 → 23
c) 451 → 541,2
d) 56 → 112
e) 300 → 400
f) 4 200 → 1 680

3 Calcula els índexs de variació percentual que corresponen als exemples de l'exercici anterior.

4 En una promoció d'electrodomèstics, una nevera que costava, sense IVA, 850 € ara costa 652,90 €, també sense incloure el 21 % d'IVA. Calcula

a) La quantitat final de diners estalviats.
b) El percentatge de descompte que suposa en comparar els dos preus amb l'IVA inclòs.

5 Calcula quant de temps han estat invertits 12 500 € a interès simple perquè al 4 % s'hagin convertit en 15 000 €.

6 Calcula el rèdit a interès simple d'un capital perquè en 15 anys s'hagi duplicat.

7 Si un capital de 90 000 € s'ha invertit a un interès compost del 2,5 % durant 6 anys, quins interessos ha produït?

8 Calcula el rèdit necessari perquè un capital de 100 000 € a interès compost augmenti un 20 % en 5 anys.

Nom: .... Data: ....

Suma, resta i multiplicació de polinomis

- Per **sumar** o **restar dos polinomis** s'agrupen i es redueixen els termes semblants:

$$(3x^3 + 5x - 6) - (4x^2 - 7x + 2) = 3x^3 + 5x - 6 - 4x^2 + 7x - 2 = 3x^3 - 4x^2 + 12x - 8$$

- Per **multiplicar dos polinomis** es multipliquen successivament tots els termes del primer per cadascun dels termes del segon; finalment s'agrupen i es redueixen els termes que siguin semblants:

$$(x - 3) \cdot (2x^2 + x - 2) = x \cdot (2x^2 + x - 2) - 3 \cdot (2x^2 + x - 2) = 2x^3 + x^2 - 2x - 6x^2 - 3x + 6 = 2x^3 - 5x^2 - 5x + 6$$

- **Quadrat d'una suma o una diferència:** $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$
- **Suma per diferència:** $(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2$

1 Siguin els polinomis $A(x) = 3x - 5x^2 - 7$, $B(x) = x^4 - 6x^2 + 5x$ i $C(x) = -2x^2 + 7x - 4 - 3x^4$; calcula:

a) $A(x) + B(x) + C(x)$

c) $B(x) - A(x)$

b) $C(x) - A(x) - B(x)$

d) $A(x) + [B(x) - C(x)]$

2 Calcula:

a) Amb els polinomis $A(x)$, $B(x)$ i $C(x)$ de l'activitat anterior comprova si es compleix la propietat associativa de la suma.

b) Amb els polinomis $A(x)$ i $B(x)$ de l'activitat anterior comprova si es compleix la propietat commutativa de la resta.

3 Siguin els polinomis $A(x) = x^3 - 4 + 3x^2$, $B(x) = -2x^3 + x^2 - 5$ i $C(x) = -3 + 2x - 6x^2 + x^3 - x^4$: calcula:

a) $A(x) \cdot B(x)$

b) $B(x) \cdot C(x)$

c) $C(x) \cdot [B(x) - A(x)]$

4 Calcula:

a) Amb els polinomis $A(x)$, $B(x)$ i $C(x)$ de l'activitat anterior comprova si es compleix la propietat associativa de la multiplicació.

b) Amb els polinomis $A(x)$ i $B(x)$ de l'activitat anterior comprova si es compleix la propietat commutativa de la multiplicació.

5 Calcula:

a) $(5 - 2y)^2$

c) $\left(2x - \frac{1}{3}\right)^2$

e) $(6 - 3t^2) \cdot (6 + 3t^2)$

b) $(2x^2 + 3xy)^2$

d) $\left(\frac{x^3}{2} + \frac{x}{4}\right)^2$

f) $\left(3x - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(3x + \frac{1}{x^2}\right)$

Nom: .... Data: ....

Divisió de polinomis

- Per **dividir un polinomi entre un monomi,** el dividend ha d'estar **ordenat.** A continuació es divideix cada terme del polinomi entre el monomi del divisor; si el residu és 0, la divisió és **exacta.**

$$8x^5 + 6x^3 - 2x^2 - 6 : (-2x^2) \rightarrow 8x^5 : (-2x^2) + 6x^3 : (-2x^2) - 2x^2 : (-2x^2) = -4x^3 - 3x + 1;\ \text{residu: } -6$$

- Per **dividir dos polinomis** es tindran en compte aquests passos:
  1. El grau del polinomi del dividend ha de ser **més gran o igual** que el del divisor.
  2. Els polinomis que s'han de dividir han d'estar **ordenats de manera decreixent** i s'han de completar amb zeros els termes que hi manquin.
  3. Dividir el **primer mono mi del dividend entre el primer del divisor;** el quocient obtingut forma part del quocient final mentre que el residu s'afegeix al terme següent del divisor.
  4. Repetir aquest procés fins que el grau del residu sigui **inferior al del divisor.**
- **Regla de Ruffini:** S'utilitza per dividir un polinomi de **grau *n*** entre un binomi ***(x-a)*** on el quocient és un altre polinomi de grau ***(n- 1).*** El primer coeficient del quocient coincideix amb el primer del dividend mentre que el **darrer** és el **residu de la divisió:**

$2x^3 - 4x^2 - 5x + 4 : (x - 3) \rightarrow$

	2	–4	–5	+4
3)		+6	+6	+3
	2	+2	+1	+7

$\rightarrow\rightarrow\rightarrow$ Quocient $Q(x) : 2x^2 + 2x + 1$ .... Residu $R(x) : 7$

1 Calcula:

a) $(4x^4y - 6x^3y^2 - 8x^2y^3 + 2xy^4) : (2xy)$

b) $(5abcd - 10abd + 15adc) : (-5ad)$

2 Calcula:

a) $(x^5 - 7x^4 + x^3 - 8) : (x^3 - 3x + 1)$

b) $(4x^5 + 20x^4 - 18x^3 - 28x^2 + 28x - 6) : (x^2 + 5x - 3)$

e) $(-6.x^4 - 3x^3 + 2x) : (3x^2 + 2) =$

d) $(-45x^4 - 120x^3 - 80x) : (-3x^2 - 4)$

3 Aplica la prova de la divisió de l'apartat a) de l'exercici anterior.

4 Aplica la *regla de Ruffini* en les divisions següents:

a) $(5x^4 + 6x^2 - 11x + 13) : (x - 2)$

b) $(3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 2x + 13) : (x - 4)$

e) $(-6x^5 + 3x^4 - 2x) : (x + 1)$

5 Calcula el valor de m perquè el residu de la divisió $(mx^3 - 3x^2 + 5x + 9m) : (x + 2)$ sigui 1.

Nom: .... Data: ....

Divisibilitat i factorització de polinomis

- Un polinomi **$A(x)$ és múltiple de $B(x)$** si hi ha un altre polinomi **$C(x)$** tal que: **$A(x) = B(x) \cdot C(x)$.** Per tant, els polinomis **$B(x)$** i **$C(x)$** són **divisors** del polinomi **$A(x)$.**
- **Teorema del residu:** El residu de la divisió del polinomi **$P(x)$** entre **$(x - a)$** equival al valor numèric del polinomi **$P(a)$.** En aquest cas, si el **residu** de la divisió **és 0,** el valor **a** és una **arrel** del polinomi **$P(x)$.**
- **Factoritzar** un polinomi de **grau n** consisteix a convertir-lo en **producte d'altres polinomis** els graus dels quals siguin **inferiors a n.** Si això no és possible, el polinomi és irreductible.
- Si tenim dos o més polinomis, es pot obtenir un altre polinomi que sigui el **M.C.D. (màxim comú divisor)** o el **m.c.m. (mínim comú múltiple) corresponent.** Per aconseguir-ho es factoritzen els dos polinomis i es procedeix igual que amb els nombres enters.

1 Comprova si el polinomi $A(x) = x^5 - 2x^4 + x^2 - 3$ és múltiple del polinomi $B(x) = x^3 - 2x^2 + 3$.

2 Comprova si el polinomi $A(x) = x^2 + 2x - 1$ és divisor del polinomi $B(x) = 2x^4 + 4x^3 + x^2 + 6x - 3$.

3 Calcula el residu de les divisions següents sense necessitat d'efectuar-les:

a) $(x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 6) : (x - 1)$

b) $(x^5 - x^3 + x - 1) : (x + 1)$

c) $(-2x^3 + 8x - 4) : (x + 2)$

d) $(-2x^4 - x^2 + 3x - 5) : (x - 3)$

4 Calcula el valor de m perquè l'oposat del terme independent del divisor sigui una arrel del polinomi:

a) $(x^3 - 4x^2 + mx + 3) : (x + 1)$

b) $(mx^4 - 2x^3 + mx - 2) : (x - 2)$

5 Factoritza els polinomis següents:

a) $x^2 - 9x + 18$

b) $x^3 + x^2 - 4x - 4$

c) $x^6 - 1$

d) $x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$

e) $25 - 9x^2$

f) $9x^3 - 4x$

6 Escriu els polinomis que tinguin les arrels següents:

a) 2, –3, –2

b) 1, –2, 3, –4

c) 0, 2, –3

7 Calcula el *M.C.D.* i el *m.c.m.* dels polinomis següents:

a) $(x^2 - 9)$ y $(x^2 - 6x + 9)$

b) $(x^3 - 7x^2 + 12x)$ y $(x^4 - 3x^3 - 4x^2)$

Nom: .... Data: ....

Fraccions algèbriques

- Una **fracció algèbrica** correspon a l'expressió del quocient de dos polinomis $\frac{P(x)}{Q(x)}$, per a $Q(x) \neq 0$.
- Dues fraccions algèbriques $\frac{P(x)}{Q(x)}$ i $\frac{R(x)}{S(x)}$ són **equivalents** si $P(x) \cdot S(x) = Q(x) \cdot R(x)$.
- Per a **simplificar** una fracció algèbrica es **factoritzen** els dos polinomis i s'**eliminen els factors** que siguin **comuns** a tots dos.
- Dues o més fraccions algèbriques es poden operar **(suma, resta, multiplicació, divisió)** si se segueixen els mateixos procediments que amb els nombres racionals.

1 Comprova si aquestes fraccions algèbriques són equivalents.

a) $\frac{x^3+x^2}{x^3-x}$ y $\frac{3x}{3x-3}$

b) $\frac{x^3+10x^2+25x}{(x+5)^2}$ y $\frac{3x-x^2}{x-3}$

2 Troba el polinomi P(x) perquè aquestes fraccions algèbriques siguin equivalents:

a) $\frac{P(x)}{x+1}=\frac{x^2-x}{x^2-1}$

b) $\frac{x^2+4x+4}{P(x)}=\frac{x+2}{2}$

3 Simplifica aquestes fracciones algèbriques:

a) $\frac{(x-3)x^2(x+2)}{(x-3)^2x(x+3)}$

b) $\frac{x^3+3x^2}{x^3+3x^2+x+3}$

c) $\frac{4x^3-2x}{2x^2-6x}$

d) $\frac{x^3-x^2-14x+24}{x^3-5x^2+6x}$

4 Calcula i simplifica el resultat:

a) $\frac{5+x^2}{3x+x^2}-\frac{1+2x}{3+x}$

b) $\left(\frac{x^2-9}{x-2}\right)\cdot\left(\frac{5x-10}{3+x}\right)$

c) $\frac{3}{x}\cdot\left(\frac{x}{1+x}-\frac{x^2}{x^2-1}\right)$

d) $\frac{2x+5}{x-2}+\frac{3x-1}{x}-\frac{3+x}{x^2-2x}$

e) $\left(\frac{1+2x}{2x-1}\right):\left(\frac{x^2}{4x-2}\right)$

f) $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}\right):\left(\frac{x^2}{x-1}\right)$

Nom: .... Data: ....

Equacions de primer grau

- Una equació és de **primer grau** si els monomis que la integren són, com a màxim, de grau 1 i pot contenir **una o dues incògnites** o variables.
- Les **solucions** d'una equació són els valors que substituïts en les incògnites converteixen l'equació en una identitat numèrica. **Resoldre** una equació és el procés que se segueix per obtenir les solucions.
- Per **resoldre** una equació de primer grau i una incògnita **s'han de suprimir,** si n'hi ha, els denominadors i els parèntesis, **transposar i reduir** els termes semblants, **aïllar** la incògnita i **comprovar** el resultat final.
- Si l'equació té **dues incògnites,** se n'**aïlla** una i s'**assignen** valors arbitraris a l'altra per trobar els valors que corresponen a la primera de les incògnites. En aquest cas l'equació té **solucions infinites** i la representació gràfica corresponent és una **recta.**

1 Resol les equacions següents:

a) $18x + 5 = 3 \cdot (4 - x)$

b) $5 \cdot (x - 1) - 2x - 7 = x - 2 - (x + 7)$

c) $(3x - 5) \cdot (6x - 7) - 2 \cdot (3x - 5)^2 = 75$

d) $12 \cdot (x - 3) - 3 \cdot (2x - 1) + 5x = 22$

e) $3x \cdot (5x - 2) - (2x + 7) \cdot (x - 3) = 13 \cdot (x - 1)(x + 1) - 15$

f) $4 - (15 - 2x) = 3 \cdot [2x - 9 - 2 \cdot (9 - x)]$

2 Resol les equacions següents:

a) $\frac{x}{9} + \frac{x}{4} = \frac{5x}{12} - 2$

b) $2x + \frac{3x}{4} = 3x - 25$

c) $\frac{x}{2} - \frac{5x+4}{3} = 7 - \frac{8x-2}{3}$

d) $\frac{x}{4} + \frac{x}{6} + \frac{x}{8} = x - 11$

e) $\frac{2x-6}{3x-8} = \frac{2x-5}{3x-7}$

f) $\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{7y}{4} + y\right) - \frac{1}{2} = y - 7$

3 Tenim l'equació $3x - 4y = 12$; calcula:

a) Els valors de y per a $x = 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3$

b) Quin valor de x correspondria a $y = 0$?

c) Representa gràficament les solucions que s'han trobat a l'apartat *"a".*

Nom: .... Data: ....

Equacions de segon grau

- Una equació és de **segon grau** si el grau màxim dels monomis que la integren és 2. L'expressió general corresponent és: $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$. La **gràfica** d'una funció quadràtica és una **paràbola.**
- Les **solucions** o **arrels** d'una equació de segon grau són els valors que substituïts en la incògnita converteixen l'equació en una identitat numèrica.
- Una equació de segon grau és **completa** si tots els coeficients d'aquesta són diferents de 0. L'equació és **incompleta** si els coeficients *b, c,* , o tots dos, són 0.

Equacions incompletes			**Equacions completes: Mètode general**
$\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$	$\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$	$\boldsymbol{ax^2 = 0}$	$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ $\boxtimes$ $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$x_1 = 0$ $x_2 = \dfrac{-b}{a}$	$x = \pm\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$	$x_1 = 0$ $x_2 = 0$	• Si $b^2 - 4ac > 0$: Dues solucions (paràbola secant a OX) • Si $b^2 - 4ac = 0$: Una solució (paràbola tangent a OX) • Si $b^2 - 4ac < 0$: Sense solució real (paràbola exterior a OX).
Propietats de les arrels (x_1, x_2): $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$ (per a *a, b, c,* coeficients de l'equació)			

1 Indica quina equació té com a solucions 1 i –2:

a) $x^2 + 4x - 5 = 0$

b) $x^2 - x - 6 = 0$

c) $x^2 + x - 2 = 0$

d) $x^2 - x - 2 = 0$

2 Resol aquestes equacions:

a) $x^2 - 14x + 13 = 0$

b) $x^2 - 5x = x - 9$

c) $x \cdot (x - 2) = 2 \cdot (x + 6)$

d) $(x + 1)^2 = 3 + x$

e) $x^2 - \dfrac{7x}{8} + \dfrac{3}{32} = 0$

f) $x^2 + 5x = -4 \cdot (x + 4) - 2 + 5x$

3 De les equacions de l'exercici anterior, indica a quines correspondria una paràbola secant a l'eix *OX*, a quines una de tangent a *OX* i a quines una d'exterior a *OX.*

4 Resol aquestes equacions:

a) $27 - 3x^2 = 0$

b) $3x^2 - 4 = 28 + x^2$

c) $x - \dfrac{x^2}{3} = 0$

d) $\dfrac{5x^2}{3} - \dfrac{3x}{4} = \dfrac{3x^2}{2}$

5 Amb l'ajuda de les propietats de les arrels troba l'equació que tingui les solucions següents:

a) $x_1 = 3$; $x_2 = -1$

b) $x_1 = 5$; $x_2 = -5$

c) $x_1 = -4$; $x_2 = 0$

d) $x_1 = -2$; $x_2 = \dfrac{-3}{5}$

Nom: .... Data: ....

Resolució d'equacions de grau superior a 2

Equacions biquadrades $ax^4 + bx^2 + c = 0$	Es resolen amb un **canvi de variable:** $x^4 = t^2$; $x^2 = t \rightarrow at^2 + bt + c = 0$ Solucions: t_1 y $t_2 \rightarrow$ $x_1 = \sqrt{t_1}$; $x_2 = -\sqrt{t_1}$; $x_3 = \sqrt{t_2}$; $x_4 = -\sqrt{t_2}$
Per descomposició factorial	Es **factoritza** l'equació igualada a 0 i s'aplica el mètode de *Ruffini.* **Solucions:** Cada **factor** obtingut correspon a una **solució** de l'equació: $(x - a) = 0 \rightarrow x = a$
Equacions irracionals	1r: S'aïlla el terme radical. 2n: S'eleven al quadrat els dos termes de l'equació. 3r: Es resol l'equació obtinguda. 4t: Es comproven les solucions.
Equacions amb fraccions algèbriques	Per resoldre-les es multipliquen tots dos termes de la igualtat pel ***m.c.m.*** dels **denominadors** i es troben les solucions de l'equació obtinguda.

1 Resol les equacions següents:

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

b) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

c) $9x^4 - 13x^2 + 4 = 0$

d) $2 \cdot \left(x^4 - \dfrac{x^2}{2} \right) = 153$

2 Resol les equacions següents:

a) $x^3 + 4x^2 - 7x - 10 = 0$

b) $x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 = 0$

c) $2x^3 - 10x^2 - 8x + 40 = 0$

d) $x^3 - 8x^2 - 9x = 0$

3 Resol les equacions següents:

a) $\sqrt{x+2} = x - 10$

b) $\sqrt{x-4} = \dfrac{x}{2} - 6$

c) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-4}} = \dfrac{3}{2}$

d) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+7} = x - 2$

e) $\sqrt{(4+3x)\cdot(9+2x)} = 0$

f) $\sqrt{x+4} = 1 + \sqrt{x-1}$

4 Resol les equacions següents:

a) $\dfrac{10}{3} - \dfrac{2}{x+3} = \dfrac{x+3}{2}$

b) $\dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{5}{4\cdot(x+1)}$

c) $\dfrac{13x+1}{3x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2x}{x-1}$

d) $\dfrac{2}{x+7} + \dfrac{1}{7\cdot(x-1)} = \dfrac{1}{x-1}$

Nom: .... Data: ....

Sistemes de dues equacions de primer grau i dues incògnites

- Un **sistema de dues equacions** esta compost per equacions les variables de les quals representen els mateixos valors.
- La **solució** d'un sistema d'equacions és un parell ordenat de nombres que verifica simultàniament les dues equacions. Aquest sistema es pot resoldre **gràficament, algèbricament** o mitjançant recursos digitals .
- Els sistemes d'equacions es classifiquen segons les solucions que tinguin: **compatible determinat** (solució única), **compatible indeterminat** (solucions infinites) e **incompatible** (cap solució).
- **Resolució gràfica** --;. Es representen gràficament les rectes de cada equació; el **parell ordenat** del punt d'intersecció correspon a la **solució** del sistema.
- **Resolució algèbrica--;.** Hi ha tres mètodes diferents:
  - **Substitució:** S'aïlla una de les incògnites en una de les equacions i se **substitueix** en l'altra.
  - **Igualació:** S'aïlla la mateixa incògnita en les dues equacions i **s'igualen** els valors respectius.
  - **Reducció:** Es multipliquen per valors adequats una o les dues equacions per tal d 'eliminar una de les incògnites i **reduir** el sistema a una única equació.

1 Resol gràficament el sistema $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - 2y = 7 \end{cases}$

2 Resol per substitució els sistemes següents:

a) $\begin{cases} x + y = 30 \\ x - y = 14 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 6y - 5x = 4 \\ 7x - 2y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + 5 = 3y - 2 \\ 2x + y = 39 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 3y = 11 \\ 5y - 3 \cdot (x - 1) = 68 \end{cases}$

3 Resol per igualació els sistemes següents:

a) $\begin{cases} 5x + 2y = 29 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y = 9 \\ 3x + 4y = 47 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - y = 5 \\ 2x - 3y + 11 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - (15y - 3) = 248 \\ y + 15x = 285 \end{cases}$

4 Resol per reducció els sistemes següents:

a) $\begin{cases} x + y = 37 \\ x - y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x - 5y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x + y - 20 = 0 \\ 5x = 11 + 2y \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 5y = -15x - 58 \\ x + 30 = y + 3 \end{cases}$

5 Resol els sistemes següents pel mètode que creguis més convenient:

a) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ 8x - 7y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 12x + 11y = 6 \\ 3y - 2 \cdot (x - 8) = 44 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y = 1 \\ \dfrac{2x}{5} + \dfrac{3y}{4} = 5 \end{cases}$

Nom: .... Data: ....

Desigualtats i inequacions

- Una **desigualtat** és una relació numèrica en la qual apareix algun dels signes següents: "$>$, $<$, $\geq$, $\leq$" $\rightarrow$ $7 > 6$; $-5 \leq \{-4, -5\}$
- Una **inequació** és una desigualtat entre expressions algèbriques $\rightarrow$ $3x - 7 > x + 5$.
- **Propietats** de les desigualtats:
  1. Si se **suma o es resta un mateix nombre** als dos membres de la desigualtat, aquesta desigualtat es manté en el **mateix sentit:** Si $2 > -4 \rightarrow 2 + 5 > -4 + 5 \rightarrow 7 > 1$
  2. Si se **multipliquen o es divideixen per un mateix nombre positiu** els dos membres de la desigualtat, aquesta desigualtat es manté en el **mateix sentit:** Si $-15 \leq -10 \rightarrow -15 \cdot 2 \leq -10 \cdot 2 \rightarrow -30 \leq -20$
  3. Si se **multipliquen o es divideixen per un mateix nombre negatiu** els dos membres de la desigualtat, aquesta desigualtat **canvia de sentit:** Si $-5 < 3 \rightarrow -5 \cdot (-4) > 3 \cdot (-4) \rightarrow 20 > -12$
- Les **solucions** d'una inequació són els valors *(conjunt solució S)* que compleixen aquesta desigualtat.
- Dues inequacions són **equivalents** si tenen el **mateix conjunt solució *S*.**

1 Expressa amb els diversos signes de desigualtat els valors següents:

a) Un nombre més petit o igual que 7

b) Un nombre més gran que –2

c) Un nombre més petit que 20 i més gran o igual que 8

d) Un nombre més gran que 5 i més petit que –4.

e) Un nombre més petit que –1 i més gran que 1.

2 Comprova si $x = 4$ i $x = -6$ són solucions de les inequacions següents (ho pot ser una, les dues o cap de les solucions que es donen):

a) $x - 2 > 3x - 4$

b) $3 \cdot (x - 4) + 10 \geq 2 \cdot (x - 7)$

c) $5 \cdot (x - 2) < 8 \cdot (x + 4)$

d) $4 - x \leq x - 4$

3 Escriu les inequacions equivalents que resulten d'aquestes transformacions:

a) $-2 \cdot (x - 2) - 8x > 5x + 4$ ….. (multiplicar per 2)

b) $-5x + 10 \geq 15x - 20$ ………. (dividir entre –5)

c) $4x + 6 < 5x - 7$ ……………. (sumar 3)

d) $7x - 5 \cdot (x - 2) \geq 3x + 1$ …… (restar 6)

4 Escriu dues inequacions equivalents de cadascuna de les que s'indiquen:

a) $x + 5 \cdot (2x - 1) + 7 < 3x + 6$

b) $1 - 4x + 2 \cdot (8 - x) > 5 + 3x$

5 Comprova si les inequacions que es donen tenen com a solució el valor indicat:

a) $6 - 7x < 5 - 6x$ …… $x = 2$

b) $\frac{x}{2} - 3 > 3 \cdot (x - 1) + \frac{x}{3}$ ….. $x = -1$

c) $3x + 2 \cdot (x - 6) \leq 3 \cdot (x - 3) - 9$ …. $x = -3$

d) $2x + 3 \cdot (x + 2) \geq 6$ ….. $x = -2$

e) $5x - 1 > 6 \cdot (x - 4) + 18$ …. $x = 6$

f) $2 \cdot (x - 3) - 2 < 3x - 14$ ….. $x = 4$

Nom: .... Data: ....

Resolució d'inequacions de primer grau

- Si la **inequació té una incògnita,** per resoldre-la es transforma en una altra d'equivalent més senzilla i se segueixen els mateixos passos que en les equacions. Al final, la **solució** se sol expressar en forma **d'interval** i es pot representar sobre una **recta numèrica.**
- Si la **inequació té dues incògnites** tindrà **solucions il·limitades,** tantes com parells ordenats li corresponguin segons la recta representada. Al final, la solució gràfica s'expressa en forma d'un **semiplà** d'aquesta recta i tenint en compte el sentit de la desigualtat. Si la desigualtat conté els signes "≥:, ≤" , els punts de la recta també **formen part** de la solució.

1 Resol les inequacions següents:

a) $-3 - 7x > 2 \cdot (1 - x)$

b) $9 + 3 \cdot (1 - x) < 4 \cdot (2 - x)$

c) $x - 2 < 2 \cdot (x - 4)$

d) $3 \cdot (x - 4) - 10 > 2 \cdot (x - 7)$

e) $5 \cdot (x - 1) \leq 18 \cdot (x + 1) - 12x$

f) $4 + 2x \geq \frac{x}{2} + 5 \cdot (x - 2)$

2 Representa en una recta numèrica les solucions de les inequacions de l'apartat anterior.

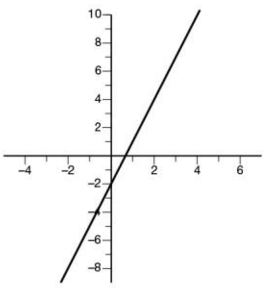
3 Escriu les coordenades següents:

a) Tres punts que siguin solució de la inequació $5y > 2x + 2$

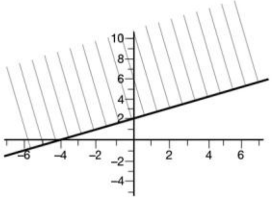
b) Tres punts que no siguin solució de la inequació $x + 4 \geq$:   4y

4 Relaciona cada inequació ambla representació gràfica corresponent:

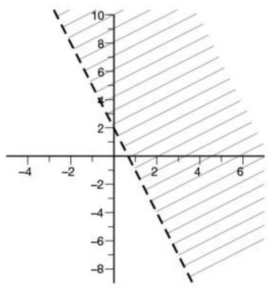
a) $y > -3x + 2$ b) $y \leq 3x - 2$ c) $y \geq \frac{x}{2} + 2$ d) $y > 3x - 2$



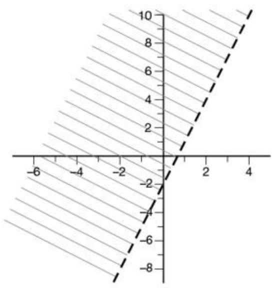
1



2



3



4

5 Resol gràficament les inequacions següents:

a) $2x + y > 5x - 4$

b) $y < x + 2$

c) $y \leq \frac{x}{4} + 2$

d) $3 \cdot (x - 1) + y \geq 0$

Nom: .... Data: ....

Resolució d'inequacions de segon grau

- Per resoldre una **inequació de segon grau** se segueix aquest procediment:
  1. **Factoritzar** el polinomi de segon grau de la inequació.
  2. **Resoldre** el sistema d'inequacions resultant.
  3. **Expressar** les solucions numèricament i gràficament sobre la recta.
  4. **Interpretar** correctament el resultat.

1 Indica quina inequació de les següents té com a solució $(-1, 4)$:

a) $x^2 - 5x + 4 > 0$

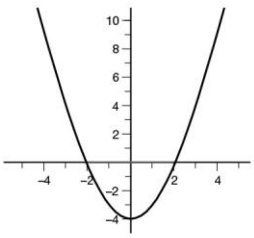
c) $x^2 - 3x - 4 < 0$

b) $x^2 + 3x - 4 > 0$

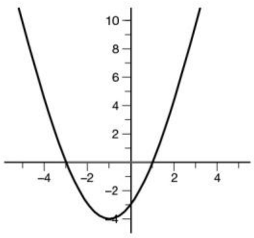
d) $x^2 + 5x + 4 \geq 0$

2 Indica les solucions d'aquestes inequacions segons la gràfica corresponent:

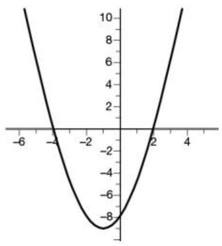
a) $x^2 - 4 \leq 0$



b) $x^2 + 2x - 3 < 0$

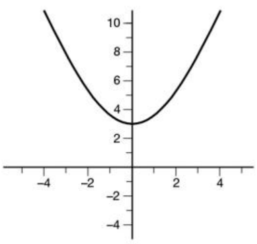


c) $x^2 + 2x - 8 > 0$

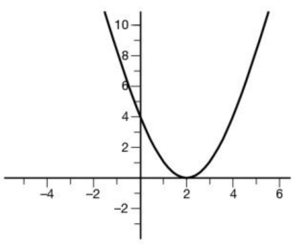


3 Indica les solucions d'aquestes inequacions segons la gràfica corresponent:

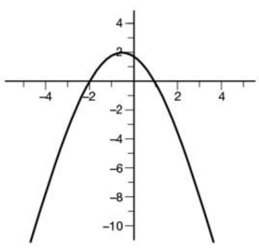
a) $x^2 + 3 > 0$



b) $x^2 - 4x + 4 < 0$



c) $-x^2 - x + 2 \leq 0$



4 Resol les inequacions següents:

a) $x^2 - 4 > 0$

d) $3x \cdot (x + 2) \geq x^2$

b) $x^2 - 2x - 3 \leq 0$

e) $2x^2 - 5x > -2$

c) $2x^2 - x - 20 < 0$

f) $x^2 < 4x$

Nom: .... Data: ....

Resolució de problemes amb inequacions

- Per **resoldre** correctament un problema amb inequacions se segueix aquest procediment:
  1. **Comprendre** el text i identificar les dades que s'hi demanen.
  2. **Triar** amb cura i amb criteri la incògnita.
  3. **Plantejar** la inequació corresponent mitjançant el llenguatge algèbric .
  4. **Resoldre** la inequació tenint en compte les propietats corresponents i els càlculs que s'han de dura terme.
  5. **Expressar** correctament el resultat i comprovar-ne la validesa.
  6. **Interpretar** la resposta del problema.

1 Busca tres nombres naturals consecutius la suma deis quals sigui igual o més petita que 21.

2 La base d'un rectangle mesura 2 cm més que l'altura d'aquest. Troba el valor deis costats si el perímetre ha de ser inferior a 28 cm.

3 El perímetre d'un octògon regular mesura més de 50 cm. Quant pot mesurar un deis costats d'aquest?

4 Troba els valors possibles d'una superfície tenint en compte que el 20 % més la quarta part d'aquesta no pot superar els 2.400 m^2.

5 Un comerciant vol pagar 180 m d 'un teixit i 100 m d 'un altre teixit que resulta 3 € més car per metre que !'anterior. Calcula quins preus li poden cobrar pels teixits si la factura suma coma màxim 860 €.

6 Busca quins nombres positius són aquells la quarta part deis quals supera en 20 unitats la cinquena part d'aquests.

7 En quant ha d 'augmentar una distancia de 100 km perquè un ciclista que circula a 40 km/h trigui menys de 4 h a recórrer-la.

8 El quadrat d'un nombre és més petit que el doble d'aquest augmentat en 15 unitats. Troba'n el valor.

9 Calcula els valors de x perquè el resultat de l'expressió $\sqrt{7-8x+x^2}$ sigui un nombre real.

Nom: .... Data: ....

Elements i característiques d'una funció

- Una **funció** $y = f(x)$ és la relació de dependència entre dues variables, x i y, de manera que a cada valor de x **(variable independent)** li correspon un sol valor de y **(variable dependent).**
- El valor b és la **imatge** del valor a ($f(a) = b$); el valor a és la **antiimatge** del valor b. Les imatges i antiimatges es calculen mitjançant càlcul algèbric i resolució d'equacions.
- El **domini** de ***f*** **(*D* (*f*))** són tots els valors que pot adoptar x; el **recorregut** de ***f*** **(*R* (*f*))** són tots els valors que pot adoptar y.

- **Punts de tall amb els eixos:** Punts on una funció **talla els eixos** de coordenades.
- **Creixement i decreixement:** Intervals en els quals, donats dos valors del domini d'una funció, els valors de les imatges **augmenten o disminueixen.**
- **Taxa de variació mitjana (TVM):** Quocient entre la **variació de les variables** dependents i independents, dins d'un mateix interval.
- **Màxims i mínims:** Punts on una funció creixent passa a ser decreixent (màxims) i viceversa (mínims). Poden ser **absoluts** o **relatius.**
- **Continuïtat i discontinuïtat:** En general, una funció és contínua si presenta un sol traç; en cas contrari és discontínua.
- **Simetries:** Una funció és **parella** (simètrica respecte a l'eix *OY*) si $f(–x) = f(x)$; una funció és imparella (simètrica respecte a l'origen de coordenades) si $f(–x) = f(x)$.
- **Periodicitat:** Una funció es **periòdica** (de període T) si els valors de les imatges es repeteixen exactament per a cada cert interval de la variable independent: $f(x + T) = f(x)$.

1 Observa la funció $y = f(x) = \dfrac{2x}{3} - 1$ i calcula:

a) L'enunciat verbal de la funció.

b) Les imatges de 0, 3, –3, 6.

c) Les antiimatges de 0, 1, –1, 2.

d) El domini i el recorregut de la funció.

2 Observa la gràfica d'aquesta funció i calcula:

a) Els punts de tall amb els eixos.

b) Els intervals de creixement i decreixement.

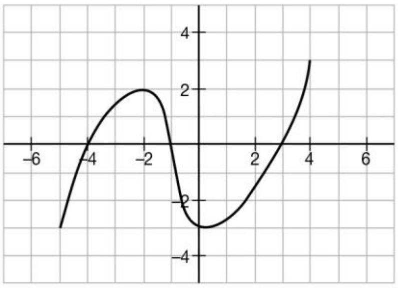
c) La taxa de variació mitjana a l'interval [–2, 4].

d) Els màxims i mínims de la funció.

e) És contínua o discontínua? Raona la resposta.

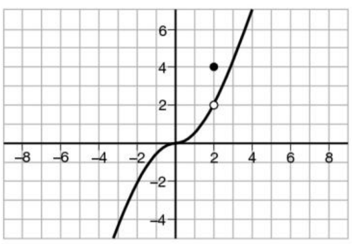
f) És periòdica? Raona la resposta.

g) És simètrica? Raona la resposta.

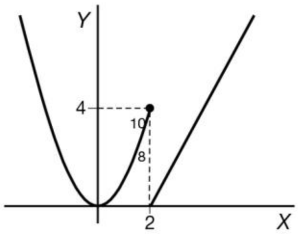


3 Estudia la continuïtat de les funcions següents:

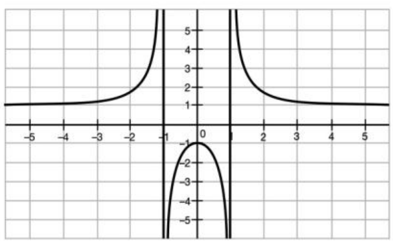
a)



b)

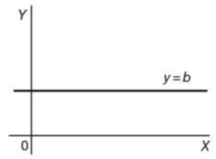
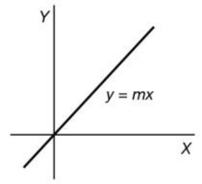
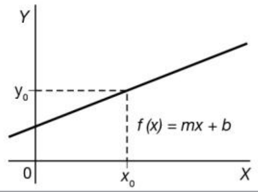


c)



Nom: .... Data: ....

Funció de grau 0 (constant) i de primer grau (lineal i afí)

Funció constant	• Gràfica: **Recta paral·lela** a l'eix d'abscisses. • Equació: ***y* = *b*** ($b \rightarrow$ ordenada en l'origen) • Pendent: ***m* = 0**	
Funció lineal	• S'estableix a partir dels valors de dues magnituds directament proporcionals. • Gràfica: Recta que passa per l'origen. • Equació: $y = mx$	
Funció afí	• Gràfica: Recta que no passa per l'origen. • Equació: $y = mx + b$ ($m \rightarrow$ pendent de la recta) ($b \rightarrow$ ordenada en l'origen)	

1 Representa gràficament en un mateix dibuix les funcions següents: $y = 3$; $y = -2$; $y = 0$.

a) Quin tipus de funcions són?

b) Raona per què el pendent que té és 0 a partir de la taxa de variació mitjana.

c) Raona per què les gràfiques anteriors mai no es tallaran entre si.

2 Observa la funció $y = \frac{-x}{2}$ i contesta:

a) Escriu el criteri de la funció.

b) Determina el pendent i el tipus de funció.

c) Elabora la taula de valors corresponents.

d) Traça la gràfica d'aquesta funció

3 Tenim una funció el criteri de la qual és *"fer el doble i restar-ne tres unitats";* contesta:"

a) Escriu l'equació de la funció.

b) Determina el pendent, el tipus de funció i l'ordenada en l'origen.

c) Elabora la taula de valors corresponents.

d) Traça la gràfica d'aquesta funció.

4 Per llogar un cotxe durant 24 h cal pagar una quota fixa de 20 € i 0,15 € per cada quilòmetre recorregut.

a) Escriu l'equació de la funció que permet saber el cost total i digues de quin tipus és.

b) Quant costarà el lloguer si s'han recorregut 110 km?

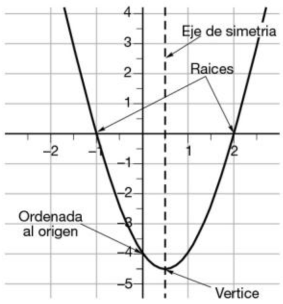
c) Quants quilòmetres s'han recorregut si al final s'han pagat 80 €?

d) Traça la gràfica de la funció.

Nom: .... Data: ....

Funció de segon grau (quadràtica)

- La **funció quadràtica** té com a equació $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$, on ($a$, b, c) són coeficients reals.
- La gràfica és una **paràbola** en la que:
  - Si $\boldsymbol{a > 0}$, està orientada cap **amunt;** si $\boldsymbol{a < 0}$, està orientada cap **avall.**
  - L'abscissa del **vèrtex** és $\dfrac{-b}{2a}$ i l'equació de l'eix **eix de simetria** és $x = \dfrac{-b}{2a}$.
  - Els punts d'**intersecció** amb l'**eix OX** són les solucions de l'equació $ax^2 + bx + c = 0$; i amb l'**eix OY,** el punt $(0, c)$
- **Nombre de solucions** d'una equació quadràtica:
  - Si la paràbola és **secant** a l'eix OX → **dues solucions** diferents.
  - Si la paràbola és **tangent** a l'eix OX → **una** única solució.
  - Si la paràbola és **no talla** a l'eix OX → **cap** solució.



- Si **a > 0,** el vértice es un **mínimo absoluto.**
- Si **a < 0,** el vértice es un **máximo absoluto.**

1 Observa la gràfica d'aquesta funció i assenyala:

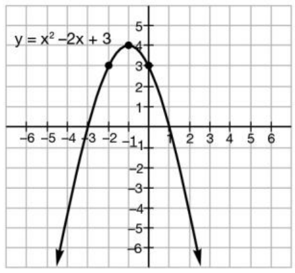
a) El criteri de la funció.

b) El vèrtex i l'eix de simetria de la paràbola.

c) Les solucions de l'equació.

d) La taula de valors.

e) Hi ha un màxim o un mínim? Raona la resposta.



2 Considera el criteri *"fer el quadrat i sumar-ne el doble valor disminuït en vuit unitats";* contesta:

a) Escriu l'equació de la funció.

b) Troba el vèrtex i l'eix de simetria de la paràbola.

c) Calcula'n les arrels.

d) Troba'n la taula de valors.

e) Indica els punts de tall amb els eixos OX i OY.

f) Traça la gràfica corresponent i indica'n la posició respecte a l'eix d'abscisses.

3 Fixa't en aquestes funcions quadràtiques i, a partir de les arrels, determina'n la posició respecte a l'eix OX sense haver-ne de traçar les gràfiques:

a) $y = f(x) = x^2 - 6x + 9$

b) $y = f(x) = 2x^2 + x + 2$

c) $y = f(x) = x^2 - 4$

d) $y = f(x) = -3x - x^2$

4 Es llança cap amunt una pedra i l'altura sobre el sòl en cada instant està determinada per la funció $y = f(\text{x}) = 30t - 5t^2$. Calcula:

a) Les arrels d'aquesta funció.

b) El vèrtex de la paràbola.

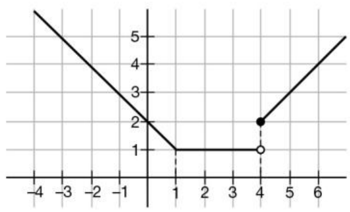
c) L'altura màxima a la qual arriba la pedra.

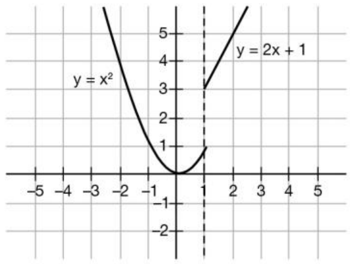
d) El temps que triga a aconseguir l'altura màxima.

Nom: .... Data: ....

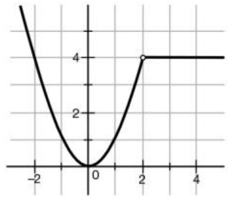
Funció definida a trossos

- Una **funció definida a trossos** (o per parts), és aquella en que la relació algèbrica entre les dues variables **és diferent en cada interval.**
- Si l'extrem d'un tros finalitza amb el símbol (o), vol dir que aquest punt **no forma part** de l'interval estudiat.





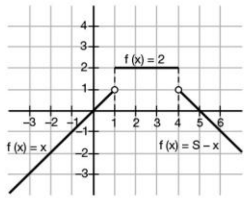
1 Observa aquesta gràfica a trossos:



a) Determina els intervals corresponents: $f(x)=\begin{cases} x^2 \rightarrow \text{.........} \\ 4 \rightarrow \text{.........} \end{cases}$

b) És contínua aquesta funció? Raona la resposta.

2 Observa aquesta gràfica a trossos.



a) Escriu les equacions i els intervals que corresponguin.

b) És contínua aquesta funció? Raona la resposta.

3 Representa gràficament la funció $f(x)=\begin{cases} 3x-1 & \text{si } x<-1 \\ x^2-4 & \text{si } -1\leq x<2 \\ \dfrac{x}{3} & \text{si } x>2 \end{cases}$

— És contínua aquesta funció? Justifica la teva resposta.

4 Representa gràficament la funció $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } -\infty\ x<-1 \\ 3 & \text{si } -1\leq x\leq 4 \\ 10-2x & \text{si } 4<x<\infty \end{cases}$

5 Un recipient amb aigua que esta a 10 °c es col·loca al foc i al cap de 5 minuts arriba als 100 oc, i es manté així durant un quart d'hora.

a) Representa en uns eixos de coordenades la gràfica d'aquesta funció. (Tria acuradament quina magnitud col·loques en cada eix).

b) Escriu les equacions que componen les dues parts de la funció.

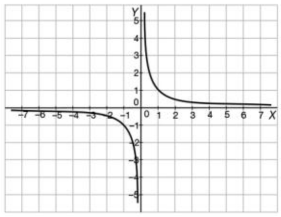
e) Determina el domini de cadascun deis trossos d'aquesta funció.

Nom: .... Data: ....

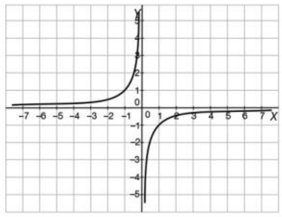
Funció de proporcionalitat inversa

- És una funció discontínua que s'estableix a partir dels valors de dues **magnituds inversament proporcionals.**
- **Equació:** $y = \dfrac{k}{x}$, on k (constant de proporcionalitat) és un nombre real diferent de zero.
- **Gràfica:** Correspon a una corba amb dues branques anomenada **hipèrbola,** l'orientació de la qual depèn del valor de k i en la qual l'eix OX és una **asímptota horitzontal** i l'eix OY, **asímptota vertical.**

Si k > 0



Si k < 0



1 Observa com varien les dimensions d'un rectangle de manera que l'àrea d'aquest sigui sempre 36 cm^2:

Base (cm)	1	2		6	18	36	
Altura (cm)			9				12

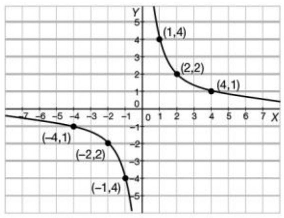
a) Completa la taula anterior.

b) Escriu la funció de proporcionalitat inversa i indica el valor de la constant de proporcionalitat.

e) Raona per que la gràfica corresponent no passa per l'origen de coordenades.

d) Quant mesuraria l'altura si la base fos 24 cm?

2 Observa aquesta gràfica i contesta:



a) Elabora la taula de valors.

b) Escriu l'equació de la funció.

c) De quin tipus de funció es tracta? Raona la resposta.

3 Tenim la funció $y = f(x) = \dfrac{8}{x}$. Contesta:

a) Troba'n la taula de valors i la gràfica.

b) Assenyala quines són les asímptotes.

4 Tenim ara la funció y= g(f) = x + 2 :

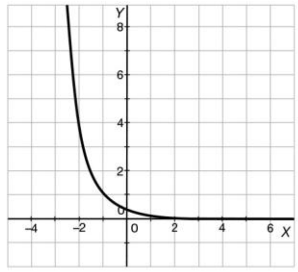
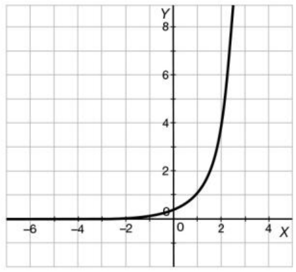
a) Traça'n la gràfica al mateix dibuix de l'exercici anterior i determina la intersecció gràfica de les dues funcions.

b) Comprova de manera algèbrica aquesta intersecció.

Nom: .... Data: ....

Funció exponencial

- S'estableix a partir d'una funció contínua en la qual la **variable** és l'**exponent** d'una potència de base real.
- **Equació:** $y = a^x$, on a és un nombre real positiu diferent d'1.
- **Gràfica:** Correspon a una corba amb una única branca l'orientació i el creixement de la qual depenen del valor de la base a i que talla l'eix OY en (0, 1), mentre que l'eix OX és una asímptota horitzontal.

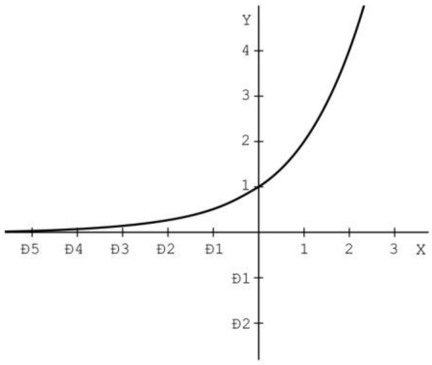
Si a < 1	Si a > 0
	
Funció decreixent	Funció creixent

1 Calcula aquests valors de la funció $f(x) = 2^x$.

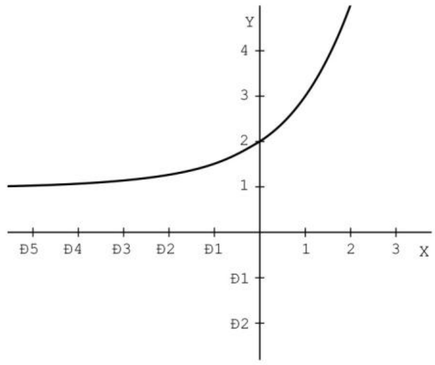
a) $f(2)$ b) $f(3)$ c) $f(-1)$ d) $f\left(\frac{3}{2}\right)$

— Quina de les gràfiques següents es correspon amb la d'aquesta funció?

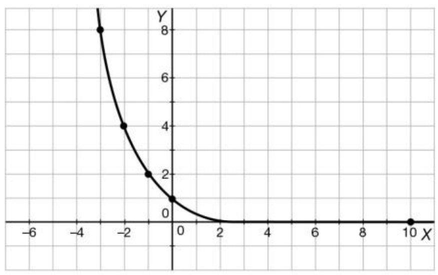
a)



b)



2 Observa aquesta gràfica i contesta:



a) Elabora la taula de valors.

b) Escriu l'equació de la funció.

c) Raona l'orientació que té la gràfica.

3 Tenim la funció $y = f(x) = 3^x$:

a) Elabora'n la taula de valors.

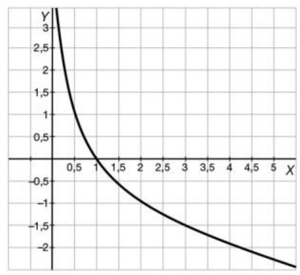
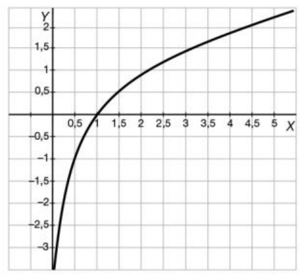
b) Construeix-ne la gràfica.

c) Com són tots els valors de les ordenades? Raona la resposta.

d) Assenyala en la gràfica l'asímptota corresponent.

Funció logarítmica

- S'estableix a partir d'una funció contínua en la qual la **variable** apareix en un **logaritme** de base real.
- **Equació:** $y = \log_a x$, on a és un nombre real positiu diferent d'1.
- **Gràfica:** Correspon a una corba amb una única branca l'orientació i el creixement de la qual depenen del valor de la base a i que talla l'eix OX en (1, 0), mentre que l'eix OY és una **asímptota vertical.**

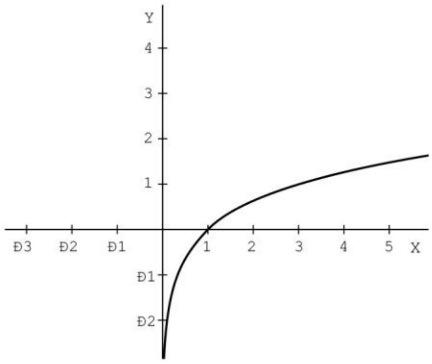
Si a < 1	Si a > 0
	
Funció decreixent	Funció creixent

1 Calcula aquests valors de la funció $f(x) = \log(x)$.

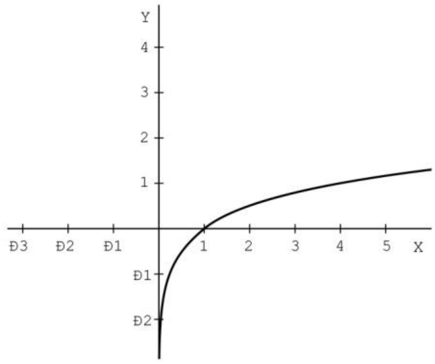
a) $f(2)$ b) $f(3)$ c) $f(-1)$ d) $f\left(\frac{3}{2}\right)$

— Quina de les gràfiques següents es correspon amb la d'aquesta funció?

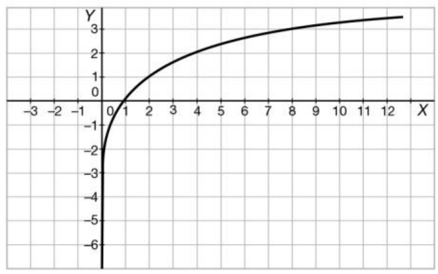
a)



b)



2 Observa aquesta gràfica i contesta:



a) Elabora la taula de valors.

b) Escriu l'equació de la funció.

c) Raona l'orientació que té la gràfica.

3 Tenim la funció $y = f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$:

a) Elabora'n la taula de valors amb l'ajuda d'una calculadora científica.

b) Construeix-ne la gràfica.

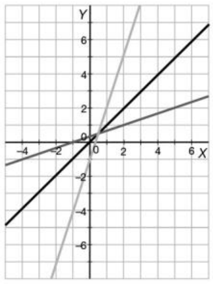
c) Assenyala en la gràfica l'asímptota corresponent.

d) Raona l'orientació que té la gràfica.

Nom: .... Data: ....

Funció inversa

- S'estableix a partir de l'***intercanvi de valors*** de les variables respecte de la funció original.
- **Equació:** Si $f(x)$ és la funció original, $f^{-1}(x)$ n'és la *funció inversa* → Per a $y = f(x) = 3x - 1$ … $y = f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{3}$.
- Les **gràfiques** de dues funcions inverses són **simètriques** respecte a la **bisectriu** ($y = f(x) = x$) dels quadrants 1r i 3r.
- Les funcions **exponencial** i **logarítmica** són funcions **inverses** entre si.



$y = 3x - 1$

$y = x$

$y = \dfrac{x+1}{3}$

1 Tenint en compte aquestes taules corresponents a diverses funcions, completa les taules de les funcions inverses.

a)

x	1	2	3
$f(x)$	1	3	5

x	1	3	5
$f^{-1}(x)$			

b)

x	1	2	3
$g(x)$	1	4	9

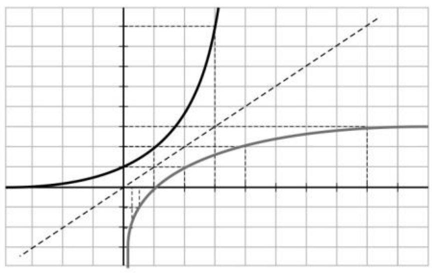
x	1	4	9
$g^{-1}(x)$			

— Quina és l'expressió algèbrica d'aquestes funcions inverses?

2 Comprova, amb els valors d'aquesta taula, que la funció $g(x) = x + 4$ és la funció inversa de la funció $f(x) = x - 4$. Comprova-ho també obtenint la funció inversa de $f(x)$.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$-2 - 4 = -6$				
$g(f(x))$	$-6 + 4 = -2$				

3 Observa aquest gràfic i contesta:



a) Elabora les taules de valors de totes dues gràfiques.

b) Escriu l'equació de cada funció i digues de quin tipus de funcions es tracta.

c) Com són entre si totes dues funcions? Raona la posició de totes dues gràfiques respecte a la recta blava que passa per (0, 0).

4 Tenim la funció $y = f(x) = x^2$:

a) Determina la funció inversa $y = f^{-1}(x)$.

b) Troba les taules de valors de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$.

c) Representa gràficament totes dues funcions i la de la bisectriu $y = x$.

d) Indica els punts d'intersecció de totes dues gràfiques amb la bisectriu $y = x$.

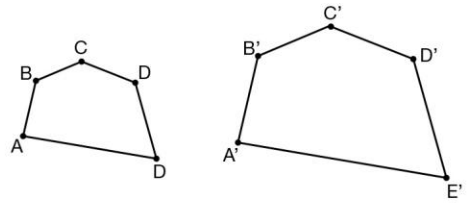
Nom: .... Data: ....

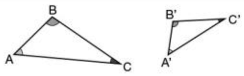
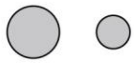
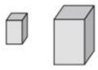
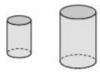
Figures i cossos semblants

- Dues figures o cossos són **semblants** si les seves distàncies **homòlogues** són proporcionals entre si:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\frac{D'E'}{DE}=\frac{E'A'}{EA}=k$$

on ***k*** és la **raó de semblança.**



Figures semblants	Dibuix	Propietats
Polígons		Costats proporcionals i angles iguals.
Cercles		Sempre són semblants entre si.
Poliedres		Arestes proporcionals, cares semblants i angles iguals.
Esferes		Sempre són semblants entre si.
Cons i cilindres		Radis de les bases i altures proporcionals.

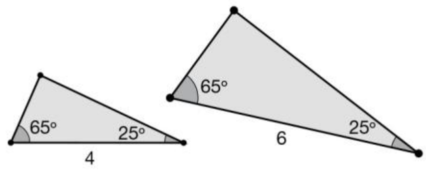
1 Tenim un polígon amb quatre costats que mesuren, respectivament, AB = 6 cm, BC = 6 cm; CD = 17 cm i DA = 12,5 cm; d'altra banda, les mesures dels costats homòlegs d'un segon polígon són $A'B'$ = 9 cm; $B'C'$ = 9 cm; $C'D'$ = 25,5 cm i $D'A'$ = 18,75 cm. Dedueix si són polígons semblants i, en aquest cas, calcula la raó de semblança.

2 Els costats d'un triangle mesuren, respectivament, 6 cm, 9 cm i 12 cm.

a) Calcula les mesures d'un triangle semblant a aquest tenint en compte que la raó de semblança d'aquest respecte del primer és $k=\frac{5}{3}$.

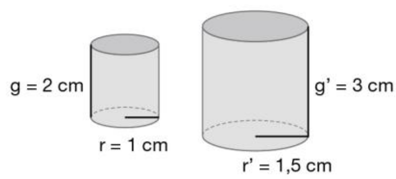
b) Calcula ara les mesures si $k=\frac{3}{4}$.

3 Raona si els dos triangles adjunts són semblants.



4 Tenim dos cubs d'arestes de 6 i 8 cm, respectivament. Raona per què són poliedres semblants.

5 Raona si els dos cilindres són semblants.



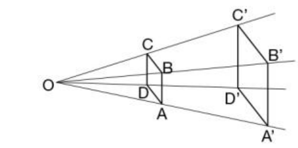
Nom: .... Data: ....

Mètodes de construcció de figures i cossos semblants

- L'**homotècia** de centre *O* i raó *k* (per a $k \neq 0$) és una **transformació isomòrfica** en què es compleix que:

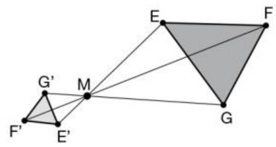
$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{OD'}{OD} = k$$

- Si $k = 1$, l'homotècia equival a una **identitat,** si $k = -1$, l'homotècia equival a una **simetria central** i si $k < 0$, la figura semblant **canvia d'orientació** respecte de l'original.



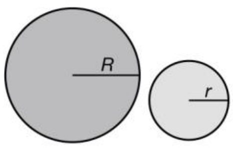
- La **semblança** és una **transformació isomòrfica** obtinguda en compondre una **homotècia** amb un **moviment** (translació, simetria o gir) o viceversa.
- En una **semblança es compleix** que:
  — Els segments homòlegs són **proporcionals.**
  — Els angles homòlegs són **iguals.**
- Una **semblança** és **directa** si la figura final conserva la seva orientació, i és **inversa** si canvia.

1 Calcula la raó d'aquesta homotècia i digues si és directa o inversa tenint en compte que la figura original és el triangle més gran.



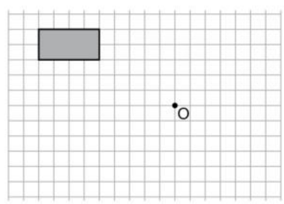
2 Dibuixa un quadrat de 2 cm de costat i aplica-hi una homotècia de centre arbitrari *O* i $k = 2$.

3 Determina el centre i la raó *k* de l'homotècia següent:

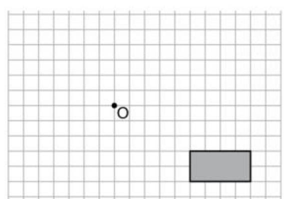


4 Aplica una simetria central de centre O a la figura següent. A continuació, aplica a la figura obtinguda una translació horitzontal, sentit esquerra, de 10 quadrícules com a longitud del vector.

— Raona per què canvia d'orientació el rectangle després d'aplicar-hi la simetria central.



5 Amb les dades de l'exercici anterior, comprova que el resultat final és el mateix si en primer lloc es fa la translació i a continuació s'aplica la simetria central.



Nom: .... Data: ....

Longituds, àrees i volums de figures i cossos semblants

- En les figures i cossos semblants es compleix que:

  —La raó entre les **longituds** de dos costats homòlegs equival a la seva raó de semblança k.

  —La raó entre les seves **àrees** equival al quadrat de la raó de semblança k (k^2).

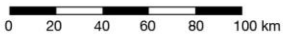
  —La raó entre els seus **volums** equival al cub de la raó de semblança k (k^3).

- L'**escala** d'un mapa o plànol equival a la raó entre una longitud mesurada en el pla i l'homòloga en l'objecte real. Les escales poden ser **numèriques** o **gràfiques.**
- En l'escala **natural (1 : 1),** l'objecte representat coincideix amb la realitat.
- En l'escala de **reducció (1 : x),** on x > 1, l'objecte representat és més petit que la realitat.
- En l'escala d'**ampliació (x : 1),** on x > 1, l'objecte representat és més gran que la realitat.

Numèriques

1 : 50

Gràfiques



1 Quines mesures tindrà un triangle rectangle si és semblant a un altre amb una raó de proporcionalitat de $\frac{5}{2}$, si un dels catets del triangle més petit mesura 24 cm i la hipotenusa corresponent, 26 cm?

2 De les dades del problema anterior, dedueix:

a) Les àrees dels dos triangles.

b) La raó de semblança k^2 entre totes dues superfícies.

c) Comprova el valor de k^2 a partir de la deducció directa de la raó k dels costats.

3 Els costats d'un quadrilàter mesuren, respectivament, 21 cm, 24 cm, 18 cm i 30 cm. Si el costat homòleg del primer costat d'un altre quadrilàter semblant mesura 14 cm, quines longituds tenen els altres costats?

4 Considera les mesures d'un full DIN A3 i un DIN A4. Són rectangles semblants? Si és així, calcula les raons k i k^2.

5 Els volums de dos cubs són, respectivament, 27 dm^3 i 216 dm^3; calcula:

a) La raó de semblança k^3 de tots dos volums.

b) L'àrea total de cadascun dels dos cubs. Comprova el valor de la raó k^2 de les àrees.

6 En un pla a escala 1:50 s'indica que un armari sobre el pla mesura 2,2 cm. Quina n'és la longitud real en metres?

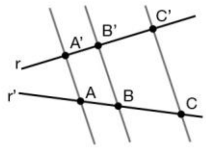
7 Dedueix l'escala d'un mapa en el qual 4,5 cm representen 135 km realment.

8 Una peça d'un motor mesura realment 6,75 cm de longitud; si està reproduït a escala 4:1, quant mesura sobre un pla?

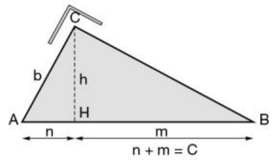
Nom: .... Data: ....

Obtenció de mesures indirectes: teoremes de Tales i Pitàgores

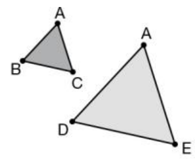
- **Teorema de Tales:** els segments determinats en tallar dues rectes secants per diverses rectes paral·leles són **proporcionals** entre si.
- Dos triangles estan en **posició de Tales** quan tenen un angle comú i els costats oposats a aquest són paral·lels.



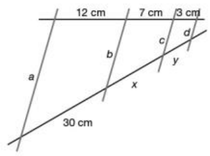
- **Teorema de Pitàgores:** en un triangle rectangle es compleix que la suma deis quadrats deis catets *(a,* b) equival al quadrat de la hipotenusa (c) $\longrightarrow c^2 = a^2 + b^2$.



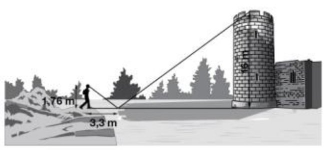
1 Col·loca aquests triangles en posició de Tales i justifica que són semblants entre si.



2 Observa el gràfic i calcula les longituds desconegudes *x, y.*



3 Observa el gràfic, en el qual una persona veu reflectida la torre a l'aigua.
Calcula la distancia entre aquesta i la base de la torre.

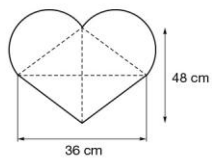


4 Un triangle rectangle té, de costats, 5 cm, 12 cm i 13 cm. Comprova quin altre triangle més gran que aquest i de raó k= 3 també és rectangle.

5 Calcula la longitud de la diagonal principal d'un cub de 8 cm de costat.

6 El perímetre d'un trapezi isòsceles mesura 1 mi les bases d'aquest, 30 i 20 cm, respectivament. Calcula la longitud deis costats no paral·lels i l’àrea corresponent.

7 Calcula el perímetre de la figura següent.



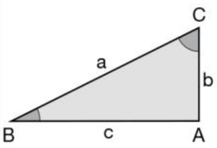
Nom: .... Data: ....

Raons trigonomètriques d'un angle agut. Resolució de triangles

- En un triangle rectangle es defineixen les raons trigonomètriques següents:

$\sin \hat{B} = \dfrac{\text{catet oposat}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{b}{a}$ $\cos \hat{B} = \dfrac{\text{catet contigu}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{c}{a}$ $\text{tg}\, \hat{B} = \dfrac{\text{catet oposat}}{\text{catet contigu}} = \dfrac{b}{c}$

$\text{cosec}\, \hat{B} = \dfrac{1}{\sin \hat{B}} = \dfrac{a}{b}$ $\sec \hat{B} = \dfrac{1}{\cos \hat{B}} = \dfrac{a}{c}$ $\text{cotg}\, \hat{B} = \dfrac{1}{\text{tg}\, \hat{B}} = \dfrac{c}{b}$



Raons trigonomètriques de 0°, 30°, 45°, 60°, 90°

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	3	∞

Resolució de triangles

- **Resoldre** un triangle **rectangle** consisteix a determinar els valors dels tres costats i dels tres angles que té a partir d'unes dades determinades.
- Si el triangle és **obliquangle,** per obtenir triangles rectangles resolubles se'n tria convenientment una de les altures.

1 Determina els valor del sinus, cosinus i tangent dels dos angles aguts d'un triangle rectangle amb uns costats que mesuren 3 cm, 4 cm i 5 cm, respectivament.

2 Determina els valors de la cosecant, secant i cotangent dels dos angles aguts d'un triangle rectangle amb una hipotenusa que mesura 13 cm i un dels seus catets, 12 cm.

3 Amb l'ajuda de la calculadora, busca les raons trigonomètriques següents:

a) sin 68° c) tg 34° e) sec 54°

b) cos 87° d) cosec 2° f) cotg 15°

4 Resol un triangle rectangle si la hipotenusa mesura 24 cm i un dels angles aguts és de 60°.

5 Resol un triangle rectangle si un dels catets mesura 12 cm i l'angle adjacent 29°.

6 Un dels costats d'un triangle mesura 6 cm i els seus dos angles adjacents, 45° i 65°. Resol-lo.

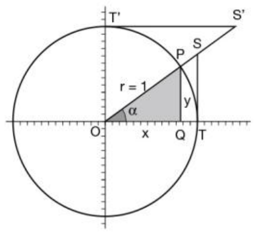
Nom: .... Data: ....

Raons trigonomètriques d'un angle qualsevol

- Les raons trigonomètriques d'un angle qualsevol es poden representar geomètricament mitjançant **segment**s en una **circumferència goniomètrica.**

$\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{PQ}{1} = PQ \qquad \cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{OQ}{1} = OQ \qquad \text{tg}\, \alpha = \frac{y}{x} = \frac{ST}{OT} = \frac{ST}{1} = ST$

- Per a tots els angles es compleix que: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ .... $\text{tg}\, \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$



- Les raons trigonomètriques de qualsevol angle es poden reduir a valors d'angles situats al **primer quadrant,** amb canvi de signe en alguns casos:

Reducció del 2n quadrant	Reducció del 3r quadrant	Reducció del 4t quadrant
$\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	$\sin (180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$	$\sin (360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$
$\cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos (180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos (360^\circ - \alpha) = \cos \alpha$
$\text{tg}\, (180^\circ - \alpha) = -\text{tg}\, \alpha$	$\text{tg}\, (180^\circ + \alpha) = \text{tg}\, \alpha$	$\text{tg}\, (360^\circ - \alpha) = -\text{tg}\, \alpha$

1 Indica el signe de les raons trigonomètriques en funció del quadrant on estigui situat l'angle:

	1º (0º - 90º)	2º (90º-180º)	3º (180º-270º)	4º (270º-360º)
sinus				
cosinus				
tangent				

2 Amb l'ajuda de la calculadora, anota el valor de les raons trigonomètriques i comprova'n les propietats:

Angle	sin	cos	tg	$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	$\text{tg}\, \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
24º					
96º					
300º					
222º					

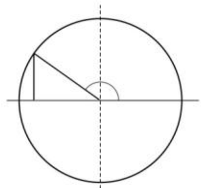
3 Si se sap que cos a = 0,4, calcula el valor de les altres cinc raons trigonomètriques.

4 Aplicant les reduccions al quadrant que correspongui, calcula les raons trigonomètriques d'aquests angles:

a) sin 135º
b) cos 120º
c) tg 150º
d) sin 210º
e) cos 225º
f) tg 240º
g) sin 300º
h) cos 330º
i) tg 315º

5 Observa el gràfic adjunt i dibuixa:

a) Un angle amb un sinus que tingui el mateix valor i signe.
b) Un angle amb un cosinus que tingui el mateix valor i signe contrari.
c) Un angle amb una tangent que tingui el mateix valor i signe contrari.



Nom: .... Data: ....

Equacions trigonomètriques

- Són aquelles en què apareixen raons trigonomètriques on les **incògnites** són els **angles.**
- Les solucions s'expressen en **graus o en radians** (360º = 2π rad) tenint en compte totes les respostes possibles entre 0° i 360°, així com un nombre indeterminat k de girs complets.
- Per resoldre equacions trigonomètriques, en ocasions cal tenir en compte les funcions **trigonomètriques inverses:**

– Per a sin $\alpha = x \longrightarrow$ **funció inversa** (f^{-1}) $\longrightarrow \alpha =$ arc sin x

– Per a cos $\alpha = x \longrightarrow$ **funció inversa** (f^{-1}) $\longrightarrow \alpha =$ arc cos x

– Per a tg $\alpha = x \longrightarrow$ **funció inversa** (f^{-1}) $\longrightarrow \alpha =$ arc tg x

1 Amb l'ajuda de la calculadora i de les funcions trigonomètriques inverses, troba el valor dels angles que corresponguin:

a) $\sin x = 0{,}9063$

b) $\sin x = 0{,}71934$

c) $\cos x = -0{,}9848$

d) $\cos x = 0{,}83867$

e) $\text{tg}\, x = -0{,}78129$

f) $\text{tg}\, x = 4{,}70463$

2 Resol les equacions següents:

a) $\sin x = \frac{-1}{2}$

b) $2 \cdot \cos x = \sqrt{3}$

c) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $2 \cdot \sin x = -\sqrt{3}$

e) $\text{tg}\, x = -\sqrt{3}$

f) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3 Resol les equacions següents:

a) $\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$

b) $-3 \cdot \sin x + \cos^2 x = 3$

c) $3 \cdot \sin^2 x - 5 \cdot \sin x + 2 = 0$

d) $2 \cdot \cos^2 x - \sin^2 x + 1 = 0$

e) $\text{tg}^2\, x - \text{tg}\, x = 0$

f) $\sin^2 x + \frac{1}{\sec x} = \frac{5}{4}$

g) $\cos x - \text{tg}\, x = \sec x$

h) $\sin^2 x + \cos x = 1$

i) $2 \cdot \cos^2 x + \sin x = 1$

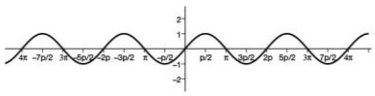
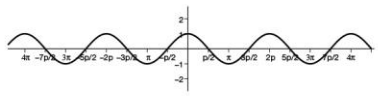
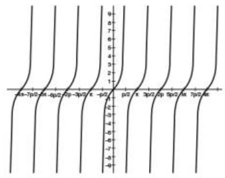
j) $2 \cdot \cos x = 3 \cdot \text{tg}\, x$

4 Per a quins angles es compleix que el valor de la seva tangent equival al de la seva cosecant?

Nom: .... Data: ....

Funcions trigonomètriques

- Les **funcions trigonomètriques** es defineixen en aplicar les raons trigonomètriques a **valors diferents** de la **variable independent,** expressats en **radiants.**
- Les **característiques principals** de les funcions trigonomètriques són:

$f(x) = \sin x$	$f(x) = \cos x$	$f(x) = \text{tg}\, x$
• *Domini* (f) = $\mathbb{R}$ • *Recorregut* (f) = $[-1, 1]$ • Té punts de tall amb els eixos. • Té màxims i mínims relatius. • Funció simètrica imparella i periòdica. 	• *Domini* (f) = $\mathbb{R}$ • *Recorregut* (f) = $[-1, 1]$ • Té punts de tall amb els eixos. • Té màxims i mínims relatius. • Funció simètrica parella i periòdica. 	• *Domini* (f) = $\mathbb{R} - \{\ldots, -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2, \ldots)$ • *Recorregut* (f) = $\mathbb{R}$ • Té punts de tall amb els eixos. • No té màxims ni mínims. • Funció simètrica imparella i periòdica. 

1 Indica el signe de les raons trigonomètriques en funció del quadrant on estigui situat l'angle:

	-2π	$\frac{-3\pi}{2}$	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin									
cos									
tg									
cosec									
sec									
cotg									

2 Dibuixa en un mateix gràfic i amb dos colors diferents les gràfiques corresponents a $f(x) = \sin x$ i a $g(x) = \sin 2x$. Com són els períodes de totes dues funcions?

3 Dibuixa en un mateix gràfic i amb dos colors diferents les gràfiques corresponents a $f(x) = \cos x$ i a $g(x) = \cos 3x$. Com són els períodes de totes dues funcions?

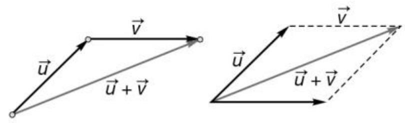
4 Traça la gràfica de la funció $f(x) = \text{cotg}\, x$. Quins són els seus punts de tall amb l'eix OX?.

Nom: .... Data: ....

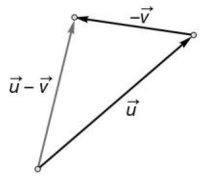
Vectors en el pla

- Un **vector** de components (A, B) és un segment orientat definit per un **mòdul,** una **direcció** i un **sentit.** En general, el mòdul de un vector $\vec{v}\ (v_1, v_2)$ es defineix com $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.
- Dos vectors són **equipol·lents** si tenen el mateix mòdul, la mateixa direcció i el mateix sentit.
- **Operacions** amb vectors lliures:
  – Suma aritmètica i geomètrica: $\vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$
  – Resta aritmètica i geomètrica: $\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w}) = (v_1 - w_1, v_2 - w_2)$
  – Producte per un nombre real: $k \cdot \vec{v} = (k \cdot v_1, k \cdot v_2)$
- Dos vectors $\vec{v}, \vec{w}$ són **linealment dependents** si $\vec{v} = k \cdot \vec{w}$; en cas contrari, són **linealment independents** i poden formar una **base.**

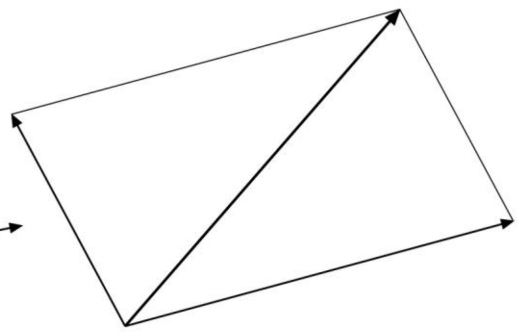
Suma de vectors



Resta de vectors

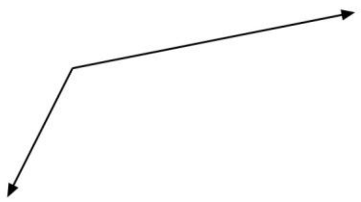


1 Per sumar dos vectors lliures, cal dibuixar el paral·lelogram que té com a costats dos representants d'aquests vectors, i la suma de tots dos és la diagonal del paral·lelogram, tal com es representa en el dibuix de la dreta.

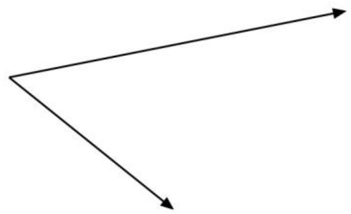


— Dibuixa el vector resultant de la suma d'aquests vectors.

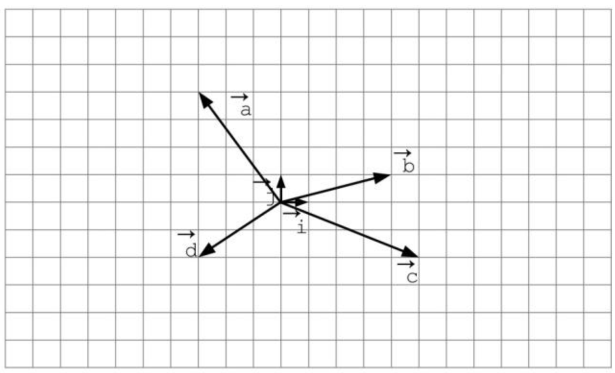
a)



b)



2 Indica les components dels vectors $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ i $\vec{d}$ de la figura següent, en la base $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$.

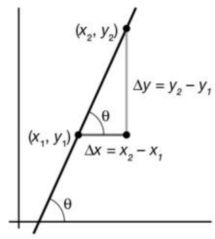


— Representa els vectors $\vec{e}$ i $\vec{f}$, les components dels quals en la base *B* són (3, −2) i (−1, 4) respectivament.

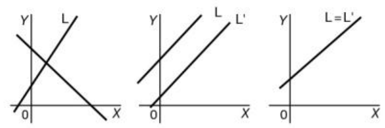
— Suma els vectors $\vec{e}$ i $\vec{f}$ gràficament i analíticament.

Rectes en el pla

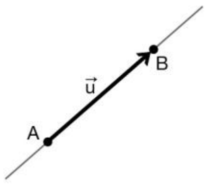
- Equació d'una recta: $\boldsymbol{y = mx + b}$, on m és el **pendent** (tangent de l'angle que forma la recta amb el semieix positiu d'abscisses) i b és l'**ordenada** en l'origen.



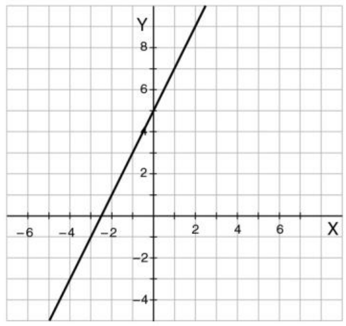
- Dues rectes poden ser:
  - **Paral·leles** (cap punt en comú), on $\boldsymbol{m = m'}$ i, a més, $\boldsymbol{b \neq b'}$.
  - **Secants** (un punt en comú), on $\boldsymbol{m \neq m'}$. Si, a més, són perpendiculars, llavors: $\boldsymbol{m \cdot m' = -1}$.
  - **Coincidents** (tots els punts comuns), on $\boldsymbol{m = m'}$ i $\boldsymbol{b = b'}$.



- Una recta també es defineix mitjançant un **punt** i una direcció $\vec{u}\,(u_1, u_2)$ **(vector director),** on $m = \dfrac{u_2}{u_1}$.



1 Observa la gràfica de la recta següent.



a) Determina el pendent i l'ordenada en l'origen.

b) Escriu l'equació de la recta.

c) Comprova analíticament si els punts (–4, –2), (–1, 3), (1, 7) i (5, 12) pertanyen a aquesta recta.

2 Determina la posició relativa d'aquestes parelles de rectes:

a) r: $3x + 2y - 5 = 0$ …. s: $6x + 4y + 9 = 0$

b) r : $y = -2x + 5$ …. s: $-4x - 2y + 10 = 0$

c) r: $4x - y + 7 = 0$ …. s: $2x + 8y - 9 = 0$

d) r: $2x - \dfrac{y}{3} = -4$ … s: $x + y - 6 = 0$

3 Determina el punt d'intersecció de les rectes de l'exercici anterior que siguin secants.

4 Traça la gràfica de les rectes les dades de les quals s'indiquen a continuació i escriu l'equació corresponent:

a) Passa pel punt (2, –1) i el vector director corresponent és $\vec{v}\,(-2,\ 1)$.

b) Passa pel punt (1, 4) i el vector director corresponent és $\vec{v}\,(1,\ 3)$.

Nom: .... Data: ....

Equacions de la recta

Vectorial: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{v} \rightarrow (x, y) = (a, b) + \lambda(v_1, v_2)$ (per a $\longrightarrow$)	$\vec{x}$ és vector de posició (x, y) d'un punt de la recta. $\vec{a}$ és vector de posició (a, b) d'un altre punt de la recta. $\vec{v}$ és vector de direcció (v_1, v_2) de la recta.
Paramètrica: $x = a + \lambda v_1 \ldots y = b + \lambda v_2$ (per a $\longrightarrow$)	
Contínua: $\dfrac{x-a}{v_1} = \dfrac{y-b}{v_2}$	
Punt-pendent: $y - b = \dfrac{v_2}{v_1}(x-a) \rightarrow y - b = m(x-a)$	(a, b) és un punt de la recta; $m = \dfrac{v_2}{v_1}$ n'és el pendent.
Explícita: $y = mx + b$	m és el pendent de la recta; b és l'ordenada en l'origen.
General o implícita: $Ax + By + C = 0$	Procedeix de l'equació contínua on: $A = v_2$; $B = -v_1$; $C = -av_2 + bv_1$.
Recta que passa per dos punts: $\dfrac{y-y_1}{x-x_1} = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	(x_1, y_1) i (x_2, y_2) són dos punts de la recta.

1 Indica a quines rectes pertany el punt A (–2, 5):

a) $y = -x + 3$

b) $y = \dfrac{x}{2} + 6$

c) $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-5}{8}$

d) $(x, y) = (1, 0) + \lambda(-2, 3)$

e) $(x, y) = (-2, 5) + \lambda(1, 1)$

f) $3x + y + 2 = 0$

2 Escriu les equacions vectorial i paramètrica d'una recta que passa pels punts A (–2, 2) i B (–1, 3).

3 A partir de les equacions anteriors, dedueix les equacions contínua, implícita, explícita i punt-pendent.

4 Escriu un punt i un vector direccional de les rectes següents, sense necessitat de fer cap càlcul:

a) $r: \dfrac{x+2}{-3} = \dfrac{y-5}{4}$

b) $t: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{1}$

c) $s: \dfrac{x-2}{0} = \dfrac{y+4}{-3}$

d) $u: \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y}{5}$

5 Calcula l'equació general de les quatre rectes anteriors.

6 Escriu totes les equacions possibles d'una recta que passi pels punts A (1, 2) i B (3, –4).

Nom: .... Data: ....

Resolució de problemes

Per **resoldre problemes** en què apareguin qüestions relacionades amb **equacions de rectes** (identificació d'equacions, resolució d'incidències, posicions relatives entre si, deducció de rectes noves en posicions diferents, etc.), convé seguir aquestes **pautes:**

1. **Llegir** atentament l'enunciat i identificar clarament les dades i la qüestió concreta per resoldre.
2. **Representar gràficament** el contingut del problema i situar les dades facilitades.
3. **Prendre com a referència** el tipus d'equació per treballar que s'adeqüi més a les dades facilitades i la qüestió per resoldre.
4. **Plantejar i resoldre** l'expressió algèbrica corresponent.
5. **Comprovar** el resultat final i resoldre el problema, si és possible, per un procediment alternatiu.
6. **Interpretar** el resultat gràficament i analíticament.

1 Escriu les equacions de les rectes següents:

a) Bisectriu del 1r i 3r quadrant.

c) Recta paral·lela a l'eix *OX* que passi per (2, –3).

b) Bisectriu del 2n i 4t quadrant.

d) Recta paral·lela a l'eix *OY* que passi per (–4, 1).

2 A partir de la recta $y = 2x + 1$, calcula:

a) L'equació d'una recta paral·lela a aquesta que passi pel punt (2, 3).

a) L'equació d'una recta perpendicular a aquesta que passi pel punt (0, –1).

c) Els punts de tall de la recta perpendicular amb totes dues rectes paral·leles.

d) La distància entre els dos punts de tall.

3 Busca l'equació d'una recta l'ordenada en l'origen de la qual és –3 i que és paral·lela a la recta $5y + 10x = 3$.

4 Un quadrat té per vèrtexs els punts (1, 0), (3, 1), (2, 3) i (0, 2). Calcula:

a) El perímetre.

b) L'àrea.

c) Les coordenades del centre.

5 Una recta forma un angle de 30° amb l'eix d'abscisses i passa pel punt (–2, –4). Troba'n l'equació.

Nom: .... Data: ....

Estadística unidimensional: Conceptes i gràfics

- **Població:** conjunt d'elements objecte d'un estudi estadístic.
- **Mostra:** part representativa de la població a la qual s'aplica l'estudi estadístic.
- **Variable estadística:** característica de la població objecte de l'estudi.
  – Variables **quantitatives:** les que prenen valors numèrics. Poden ser **contínues** o **discretes.**
  – Variables **qualitatives:** les que s'expressen mitjançant categories o característiques.
- Les **dades estadístiques** es poden expressar mitjançant taules, amb o sense dades agrupades.
- **Tipus de gràfics:**

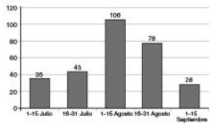
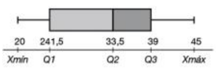
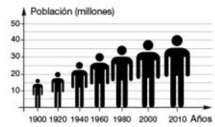


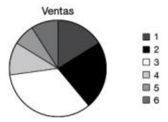
Diagrama de barres



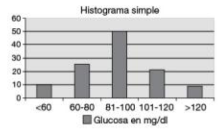
Caixes i bigotis



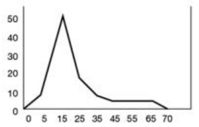
Pictogrames



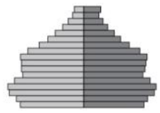
Sectors

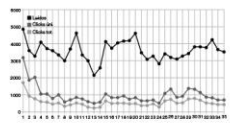


Histograma


Polígons de freqüències


Cartogrames


Piràmides de població


Gràfics comparatius


Gràfics evolutius

1 En un institut es vol dura terme un estudi estadístic sobre el temps que dedica cada estudiant a la lectura. Amb aquesta finalitat, se seleccionen 45 deis 398 estudiants que hi ha al centre educatiu perquè contestin la pregunta. En aquest estudi estadístic concret, descriu els conceptes següents

Població: ....

Individu: ....

Mostra: ....

Variable estadística: .... Tipus:...

2 Completa aquesta taula corresponent al consum d'aigua, en m^3, de 184 famílies en un barri d'una ciutat durant el mes d'octubre.

Consum d'aigua	Marca de classe	Freqüència absoluta (n_i)	Freqüència relativa (f_i)	Freqüència absoluta acumulada (N_i)	Freqüència relativa acumulada (F_i)
[0, 4)	2	5	0,0272	5	0,0272
[4, 8)	6	14	0,0761	19	0,1033
[8, 12)	10				
[12, 16)	14				
[16, 20)					
[20, 24)					
[24, 28)					
[28, 32)					
[32, 36)					
		$\Sigma\, n_i = 184$	$\Sigma\, f_i = 1$		

3 Confecciona !'histograma corresponent a les dades de la taula anterior.

Nom: .... Data: ....

Estadística unidimensional: Mesures de centralització i dispersió

Els **paràmetres de centralització** serveixen per localitzar diversos **valors intermedis** que són representatius d'una distribució estadística.

Moda (M_o)	**Mediana (M_e)**	**Mitjana aritmètica ($\overline{x}$)**	**Quantils**
És el valor més repetit de tota la distribució.	És el valor central de la distribució una vegada està ordenada.	$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$	Són els valors que divideixen la distribució en parts iguals: quantils (Q_i), decils (D_i), percentils (P_i).

Els **paràmetres de dispersió** serveixen per indicar si els valors estan **més o menys agrupats** al voltant dels paràmetres de centralització.

Recorregut (r)	**Desviació (d_m)**	**Variància (σ^2)** **Desviació típica (σ)**	**Rang interquartílic**	**Coeficient de variació**
$r = V_{\text{màxim}} - V_{\text{mínim}}$	$d_m = \frac{\Sigma \lvert x_i - \overline{x} \rvert}{N}$	$\sigma^2 = \frac{\Sigma \lvert x_i - \overline{x} \rvert^2 \cdot f_i}{N} = \frac{\Sigma x_i^2 \cdot f_i}{N} - (\overline{x})^2$ $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$	$IQR = Q_3 - Q_1$	$CV = \frac{\sigma}{\overline{x}}$

1 S'ha mesurat el ritme cardíac de 16 persones i aquests en són els resultats en pulsacions/minut: 80, 84, 76, 72, 76, 85, 89, 80, 87, 76, 70, 71, 74, 72, 70, 70. Calcula:

a) Els paràmetres de centralització: moda, mediana i mitjana aritmètica.

b) Els paràmetres de dispersió: recorregut, desviació mitjana, variància, desviació típica.

2 De la taula de dades de l'exercici 2 de la pàgina anterior, calcula:

a) La moda, la mediana i la mitjana aritmètica.

b) El recorregut, la desviació mitjana, la variància i la desviació típica.

c) El primer i el tercer quartil.

d) Els percentils 40 i 80.

Estadística bidimensional: Conceptes i gràfics

- L'**estadística bidimensional** es caracteritza per l'estudi conjunt de **dues variables** estadístiques; les dades obtingudes constitueixen una **distribució bidimensional.**
- Les **taules de contingència** organitzen les dades d'una variable bidimensional:

Amb dades no agrupades

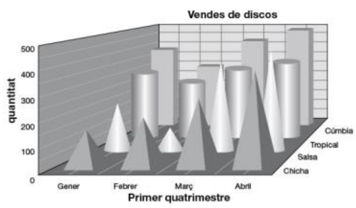
	Fumadors	No fumadors	Totals
Homes	120	60	180
Dones	50	70	120
Totals	170	130	300

Amb dades agrupades

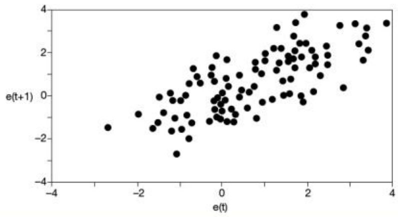
Alçada/Pes	(45-55]	(55-65]	(65-75]	(75-85]	Total
(1,55-1,65]	3	1	0	0	4
(1,65-1,75]	1	4	3	1	9
(1,75-1,85]	1	0	1	4	6
(1,85-1,95]	0	0	1	0	1
Total	5	5	5	5	*N* = 20

- **Tipus de gràfics:**

Tridimensionals



Núvols de punts



1 Aquesta taula d'entrada doble representa els sous (variable Y) dels empleats d'una empresa d'alta tecnologia segons l'antiguitat que tinguin (variable X). Els sous s'expressen en milers d'euros i l'antiguitat, en anys.

Contesta:

a) Quants empleats que portin 5 anys en l'empresa guanyen 54 000 €?

b) Quants empleats guanyen 56 000 €?

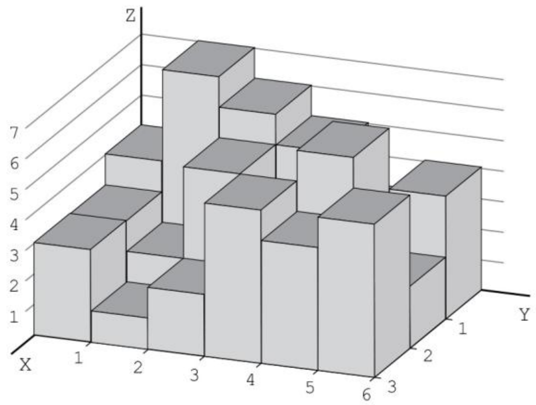
c) Quin percentatge d'empleats té una experiència igual o inferior a 6 anys?

d) Quin percentatge d'empleats guanya entre 53 000 i 55 000 €, inclosos els extrems?

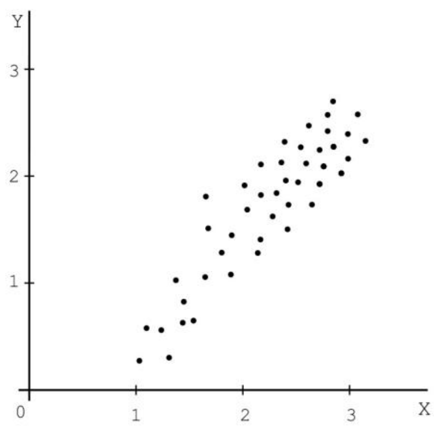
y \ x	2	3	4	5	6	7	8	9
50	1							
51		3						
52			5					
53				8	1			
54				2	9	1		
55					3	7		
56						3	2	
57							2	1
58							1	1

2 Indica a quin tipus pertanyen els gràfics següents:

a)



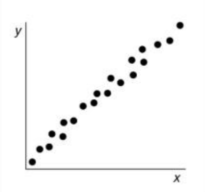
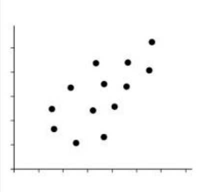
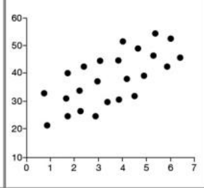
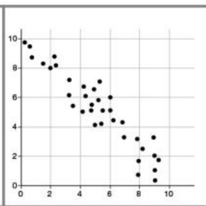
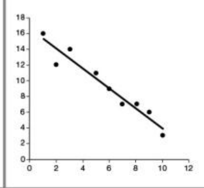
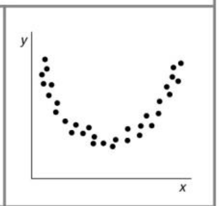
b)



Nom: .... Data: ....

Estadística bidimensional: Anàlisi de dades, correlació i regressió lineal

- L'**anàlisi de dades** consisteix a estudiar la relació entre les dues variables estadístiques utilitzades. Hi ha una **dependència funcional** si es poden determinar exactament els valors d'una variable a partir dels valors que pren l'altra variable.
- Dues variables estadístiques són **independents** si no hi ha una dependència funcional entre si.
- La **dependència estadística** o **correlació** es produeix si la relació entre les variables es demostra de manera no exacta i es concreta en diversos graus, sentits i tipus:

Grau		Sentit		Tipus	
					
Fort	**Feble**	**Positiu**	**Negatiu**	**Lineal**	**Curvilínia**

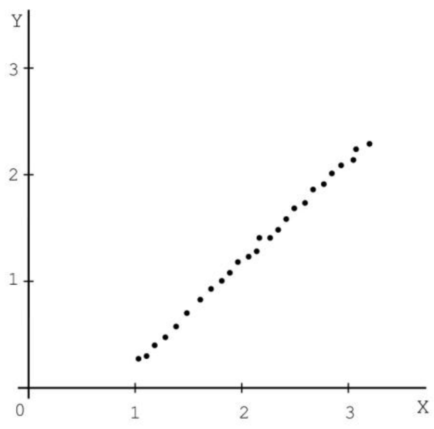
- Mesura de la correlació:

Covariància: $\sigma_{xy} = \dfrac{\sum_{i,j}(x_i - \overline{x})\cdot(y_j - \overline{y})}{N}$ o $\sigma_{xy} = \dfrac{\sum_{i,j} x_i \cdot y_j \cdot n_{ij}}{N} - \overline{x}\cdot\overline{y}$ **Coeficient de Pearson (r):** $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$

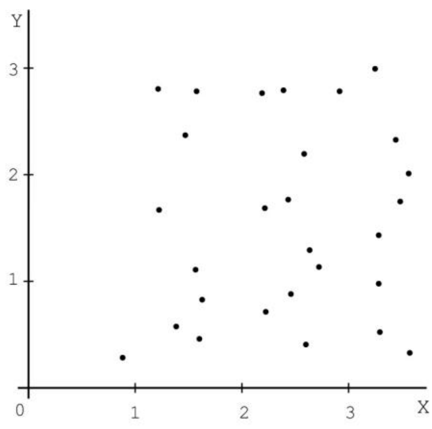
- Per predir el comportament de les dades, s'utilitza la **regressió,** que és l'anàlisi amb la qual es determina la línia que més s'aproxima al diagrama de dispersió; si s'aproxima a una recta, es tracta d'una **regressió lineal.** L'**equació** d'aquesta recta es pot obtenir a partir del criteri dels **mínims quadrats.**

1 Quin dels gràfics següents presenta una correlació forta i quin una de feble?

a)



b)



2 Tenim aquests valors per al coeficient de Pearson, r, d'una variable bidimensional, (X, Y); indica si hi ha una dependència funcional entre X i Y, i assenyala si el coeficient és incorrecte.

a) $r = 0$ b) $r = 0{,}5$ c) $r = 20{,}1$ d) $r = 1$ e) $r = 2$ f) $r = 0{,}9$

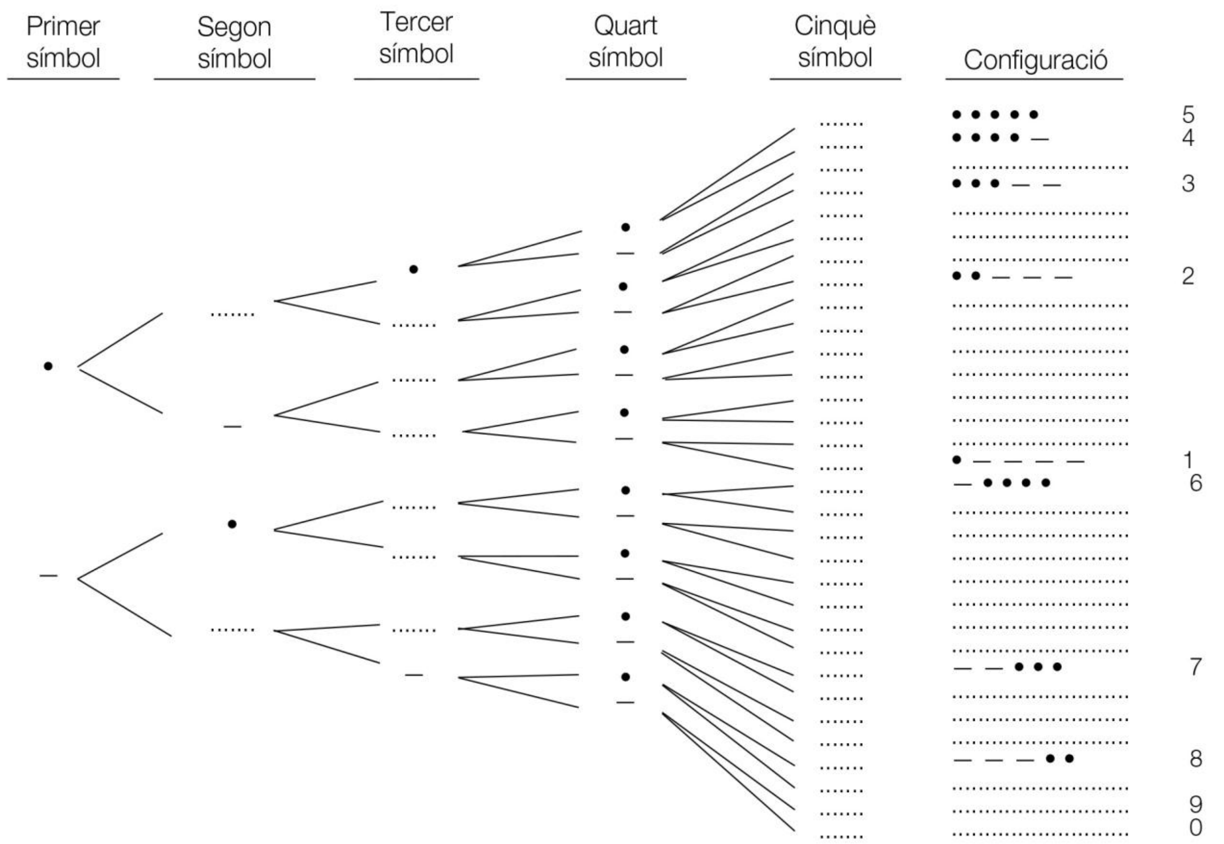
— Ordena els apartats segons el grau de correlació entre X i Y.

Nom: .... Data: ....

Diagrames en arbre i taules de contingència

- Un **diagrama en arbre** és una eina per determinar tots els resultats possibles d 'un experiment aleatori mitjançant ramificacions; cada resultat possible és una configuració.
- Les **taules de contingència** són taules d'entrada doble on es registra numèricament l'associació entre dues variables.

1 L'alfabet MORSE utilitza dos símbols, el punt • i la ratlla –. Per codificar les xifres {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} s'utilitzen cinc d'aquests símbols. Completa el diagrama en arbre que presenta la codificació d'aquestes xifres mitjan<;ant l'ús deis símbols • i –.



2 Entre els millors clients d'una empresa se sortejarà un viatge a Berlín; la distribució per estat civil i sexe deis participants és la de la taula adjunta. Completa-la i, a continuació, contesta:

a) Quantes persones solteres hi participen?

b) Quants homes casats hi participen?

e) Quantes dones solteres hi participen?

	Homes	Dones	Total
Casats		40	90
Solters			
Total		55	130

3 En una ciutat, el 42% de les llars té connexió a Internet, el 35% té connexió de televisió per cable i el 18% gaudeix de tots dos serveis. Reflecteix aquestes dades mitjan<;ant una taula de contingència i calcula les dades que hi manquen.

Nom: .... Data: ....

Variacions

- **Variacions sense repetició** d'*n* elements agafats de *k* en *k* (configuracions diferents pels elements o per l'ordre que tenen):

$$V_{n,\,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

- **Variacions amb repetició** d'*n* elements agafats de *k* en *k* (configuracions diferents només per l'ordre que tenen):

$$V_{n,\,k} = n^k$$

1 Calcula:

a) $V_{4,\,2}$ b) $V_{8,\,4}$ c) $V_{10,\,6}$

2 Calcula:

a) $VR_{5,\,3}$ b) $VR_{6,\,5}$ c) $VR_{9,\,6}$

3 Quants nombres de quatre xifres diferents es poden formar amb les nou primeres xifres significatives.

4 Quants nombres de dues xifres, repetides o no, es poden formar amb les nou primeres xifres significatives.

5 Digues quantes banderes diferents es poden formar amb 6 colors si cada bandera ha de tenir quatre ratlles horitzontals i no es pot repetir cap color.

6 Quants partits de bàsquet es juguen en una temporada si en la competició hi ha 18 equips i la lliga és a doble volta.

7 En un vaixell es fan senyals amb tres banderes diferents. Si disposen de 8 banderes, quantes senyals diferents es poden fer?

8 Quina és la possibilitat d'encertar un ple al 15 en la travessa si fem una única aposta.

Nom: .... Data: ....

Permutacions

- **Permutacions sense repetició** d'n elements agafats d'n en n en totes les configuracions intervenen tots els elements però en ordre diferent):

$$P_n = n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = V_{n,\, n}$$

- **Permutacions amb repetició** d'n elements repetits n_1, n_2, …. n_k vegades (on es compleix que $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$):

$$PR_n^{n_1 \ldots n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

1 Calcula:

a) PR_8 b) P_6 c) P_{10}

2 Calcula:

a) $PR_6^{4,2}$ b) $PR_8^{2,4,2}$ c) $PR_{10}^{2,3,1,4}$

3 Quants nombres de quatre xifres diferents es poden formar amb les xifres 1, 2, 4, 7.

4 De quantes maneres diferents poden seure sis persones en una taula rodona.

5 En una sala hi ha 5 persones solteres i 4 persones casades:

a) De quantes maneres es poden posar en fila les persones solteres?

b) De quantes maneres es poden posar en fila les persones casades?

c) Si es barregen les persones, de quantes maneres es poden posar totes en fila?

d) Si es barregen les persones, de quantes maneres es poden posar totes en fila si, a més, tots els solters han d'estar seguits?

6 Quants nombres de sis xifres es poden escriure amb les xifres que componen el nombre 877 789.

7 Quantes paraules diferents, amb o sense sentit, podem construir amb les lletres que formen l'expressió “reses”.

Nom: .... Data: ....

Combinacions i nombres combinatoris

- **Combinacions sense repetició** d'n eelements agafats de k en k (configuracions diferents només pels seus elements):

$$C_{n,k}=\frac{V_{n,k}}{P_k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

- **Combinacions amb repetició** d'n elements agafats de k en k:

$$CR_{n,k}=\binom{n+k-1}{k}\rightarrow \text{(nombre combinatori)}$$

- En qualsevol **nombre combinatori** es compleix que: $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$
- **Binomi de Newton:**

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^nb^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}a^1b^{n-1}+\binom{n}{n}a^0b^n$$

Així mateix $$(a-b)^n=\binom{n}{0}a^nb^0-\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{2}a^1b^{n-1}+(-1)^{n-1}\binom{n}{n}a^0b^n$$

1 Calcula: a) $C_{5,\,2}$ b) $C_{6,\,4}$ c) $C_{10,\,3}$

2 Quants triangles es poden dibuixar, com a màxim, amb 8 punts?

3 Una església té 5 campanes i cada vegada que toquen les hores sonen alhora. De quantes maneres diferents poden sonar?

4 Amb la combinatòria, calcula quantes diagonals es poden traçar en un heptàgon.

5 Un ramader vol comprar 3 vaques i 6 xais a un altre ramader que té 6 vaques i 8 xais. Quants lots distints es poden fer?

6 Calcula: a) $\binom{6}{3}$ b) $\binom{9}{4}$ c) $\binom{11}{7}$

7 Calcula mitjançant el binomi de Newton:

a) $(3x+4)^5=$ b) $(2x-x^2)^6=$

Nom: .... Data: ....

Experiments i esdeveniments

- Els **experiments deterministes** segueixen unes lleis estrictes i mai no depenen de l'atzar.
- Els **experiments aleatoris** depenen de factors que no es poden determinar ni controlar.
- Un **esdeveniment elemental** correspon a cadascun deis resultats possibles d' un experiment; si es combinen diversos esdeveniments elementals, el resultat és un **esdeveniment compost.**
- **L'espai mostral** (O) d'un experiment és el conjunt de tots els esdeveniments elementals possibles que !'integren. Qualsevol subconjunt de l'espai mostral és un **esdeveniment.**

Esdeveniment segur	Esdeveniment impossible	Esdeveniments contraris	Esdeveniments compatibles	Esdeveniments incompatibles
Ocorre sempre i coincideix amb l'espai mostral.	No ocorre mai; es representa amb (Ø).	Són aquells en què si se'n fa un, l'altre no es pot donar: $\overline{A} = \Omega - A$	Són aquells que poden ocórrer simultàniament.	Són aquells que no poden ocórrer simultàniament.

1 Digues quins d'aquests experiments són deterministes (D) i quins són aleatoris (A):

a) Obtenir un 4 en llançar un dau.
b) Fer fred quan neva.
e) Arribar a un semàfor i que estigui en verd.
d) Que l'aigua bulli als 100 oc.
e) Trobar una amiga al cinema.
f) Obtenir el premi gros de Nadal.

2 Digues quins d'aquests esdeveniments són elementals (E) i quins són compostos (C):

a) Sortir cara en llançar una moneda.
b) Dir el joc preferit.
e) Extreure d'una baralla dues sotes seguides.
d) Cridar !'ascensor i que estigui a la planta baixa.
e) Arribar a un semàfor en vermell i portar corbata.
f) Treure una fitxa determinada en el dòmino.

3 Digues quins d'aquests esdeveniments són segurs (S) i quins són impossibles (1) :

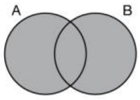
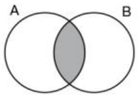
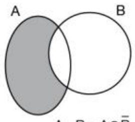
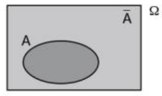
a) Sumar 9 punts en extreure una fitxa doble en el dòmino.
b) Extreure una carta de cors, rombes, piques o trèvols d'una baralla de pòquer.
e) Sumar 20 punts en llançar tres daus de parxís.
d) Haver nascut un 30 de febrer.
e) Estar un cotxe en marxa o aturat.

4 Escriu l'esdeveniment contrari de cadascun deis següents:

a) Preferir un mes de l'any que tingui 30 dies.
b) Triar el color blau o vermell en jugar al parxís.
c) Extreure una fitxa doble del dòmino.
d) Obtenir una figura d' una baralla espanyola.
e) Sortir cara en llançar una moneda.

Nom: .... Data: ....

Operacions amb esdeveniments

Unió d'esdeveniments	Intersecció d'esdeveniments	Diferència d'esdeveniments	Complementari d'un esdeveniment
 Esdeveniment $A \cup B$	 Esdeveniment $A \cap B$	 $A - B = A \cap \overline{B}$	 $\overline{A} = \Omega - A$
Formada per tots els resultats presents en **A o en B.**	Formada per tots els resultats presents en **A i en B,** simultàniament.	Formada pels resultats presents en **A però no en B.**	Formada per **tots** els resultats de l'experiment no **presents en A.**

- **Freqüència absoluta *(f_a)*** d'un esdeveniment: Nombre de vegades que ocorre quan es fa un experiment aleatori.
- **Freqüència relativa *(f_r)*** d'un esdeveniment: Quocient entre la freqüència absoluta d'un esdeveniment i el nombre de realitzacions.

1 S1, S2, S3, S4, S5 i S6 són els esdeveniments corresponents a obtenir 1, 2, 3, 4, 5 o 6, respectivament, en llançar un dau de parxís. Calcula:

a) {S5, S6} ∪ {S2, S4, S6} =

b) {S4, S5, S6} ∪ {S1, S3, S5} =

c) {S1, S3, S5} ∩ {S3, S4, S5, S6} =

d) {S4, S6} ∪ [{S2, S3, S4} ∩ {S2, S4}] =

2 En l'espai mostral Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} d'un experiment aleatori s'estableixen els esdeveniments A = {2, 3, 4, 5} i B = {4, 5, 7}. Calcula les operacions següents:

a) $A \cup B =$

b) $A \cap B =$

c) $\overline{A} =$

d) $A - B =$

e) $A \cup \overline{A} =$

f) $B \cap \overline{B} =$

g) $\Omega \cap B =$

h) $\Omega \cup A =$

3 Es llança una xinxeta i s'observa la posició en què es queda aturada; amb la punta cap amunt o inclinada. Contesta:

a) Quina és la probabilitat que, després de llançar-la, la xinxeta quedi amb la punta cap avall?

b) Es fan 80 llançaments i s'observa que en 42 ocasions la xinxeta queda cap avall.

1. Calcula la freqüència relativa que li correspongui.
2. Compara aquesta freqüència amb la probabilitat teòrica.

c) Completa la taula de llançaments i calcula les freqüències relatives que corresponguin. Com evolucionen aquestes?

Llançaments	100	150	240	420	660	1 200
f_a	49	77	118	209	333	599
f_r						

Nom: .... Data: ....

La probabilitat: càlcul i propietats

- La **probabilitat** *P* d'un esdeveniment és la quantificació del seu caràcter aleatori i mesura el grau de possibilitat que ocorri; el seu valor oscil·la entre 0 i 1.
- **Regla de Laplace:** S'utilitza per calcular la probabilitat en cas d'esdeveniments equiprobables (que tinguin la mateixa probabilitat que ocorrin): $P(A) = \dfrac{\text{Nre. de resultats favorables d'}A}{\text{Nre. de resultats possibles}}$

Propietats de la probabilitat			
Per a un esdeveniment A: $0 \leq P(A) \leq 1$	Per a tot esdeveniment segur (Ω): $P(\Omega) = 1$	Per a tot esdeveniment impossible (ø): $P(\emptyset) = 0$	Per a $\overline{A}$, esdeveniment contrari d'A $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Para A i B, esdeveniments incompatibles: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	Per a A i B, esdeveniments compatibles: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	Si l'espai mostral (Ω) és finit i hi ha un esdeveniment $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$: $P(S) = P(x_1) + P(x_2) + \dots P(x_n)$

1 En una caixa hi ha 20 boles de les quals 8 són blaves, 6 són vermelles, 4 són grogues i 2 són verdes. Calcula la probabilitat que en triar-ne una a l'atzar sigui ...:

a) ... blava.
b) ... vermella.
c) ... groga.
d) ... verda.
e) ... blava, vermella, groga o verda.
f) ... blanca.
g) ... no sigui blava.
h) ... vermella, verda o blava.

2 Un dau s'ha llançat 400 vegades i les freqüències relatives dels llançaments que se n'ha fet són: f(1) = 0,16; f(2) = 0,15; f(3) = 0,17; f(4) = 0,16; f(5) = 0,18; f(6) = 0,18. Calcula les probabilitats següents:

a) Obtenir un nombre primer.
b) Obtenir un nombre imparell.
c) Obtenir un nombre parell.
d) Obtenir un nombre superior a 4.
e) Obtenir un nombre inferior a 3.
f) Obtenir un nombre parell o múltiple de 5.
g) Obtenir un nombre imparell o un divisor de 4.
h) Obtenir un nombre parell o un divisor de 6.

3 Observa aquesta taula sobre les edats d'uns alumnes d'ESO:

	14 anys	**15 anys**	**16 anys**	**17 anys**
Noies	5	8	12	5
Nois	11	10	--	9
Total	16	18	12	14

a) Calcula la probabilitat de triar a l'atzar un alumne de més de 15 anys o que sigui una noia.
b) Calcula la probabilitat de triar a l'atzar un alumne que sigui un noi o que sigui una noia de 16 anys.

4 Es tria a l'atzar un nombre de l'1 al 100; calcula:

a) La probabilitat que sigui múltiple de 5.
b) La probabilitat que sigui múltiple de 7 o de 8.
c) La probabilitat que sigui múltiple de 6 o divisor de 24.

Nom: .... Data: ....

Probabilitat en experiments compostos

- En **experiments compostos,** els esdeveniments A i B són **independents** si el fet que es verifiqui l'esdeveniment A **no influeix** en la verificació de l'esdeveniment B; en cas contrari són **dependents.**
- Probabilitat d'esdeveniments independents: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
- Probabilitat condicionada $P(B/A)$ per a esdeveniments dependents (probabilitat de B condicionada a A):

$$P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

1 Calcula la probabilitat d'extreure consecutivament dues copes d'una baralla espanyola segons les condicions següents:

a) Tornant la primera carta a la baralla.

b) Sense tornar la primera carta a la baralla.

2 En un estoig hi ha 10 llapis dels quals 3 són vermells, 5 són blaus i 2 són negres. Calcula:

a) La probabilitat d'extreure consecutivament dos llapis vermells, amb retorn.

b) La probabilitat d'extreure consecutivament dos llapis vermells, sense retorn.

c) La probabilitat d'extreure consecutivament un llapis blau i un de negre, amb retorn.

d) La probabilitat d'extreure consecutivament un llapis blau i un de negre, sense retorn.

e) La probabilitat d'extreure consecutivament tres llapis vermells, amb retorn.

f) La probabilitat d'extreure consecutivament quatre llapis blaus, sense retorn.

3 En una caixa hi ha 24 bombons dels quals 7 són de trufa, 9 de licor i 8 de praliné. Calcula la probabilitat dels esdeveniments següents:

a) Triar tres bombons a l'atzar i que tots siguin de licor.

b) Triar tres bombons a l'atzar i que dos siguin de trufa i un de praliné.

c) Triar tres bombons a l'atzar i que tots siguin diferents.

4 Un dau es llança consecutivament quatre vegades. Calcula la probabilitat dels esdeveniments següents:

a) Obtenir un 4 totes les vegades.

b) Obtenir un nombre imparell totes les vegades.

c) Obtenir un divisor de 6 totes les vegades.

d) Obtenir un 5 al menys 3 vegades.