CALCULAR EL MÀXIM COMÚ DIVISOR (m.c.d.) DE DOS NOMBRES

Nom: Curs: Data:

El màxim comú divisor de dos nombres és el **més gran** dels seus **divisors comuns**.

EXEMPLE

Siguin els nombres 12 i 42. Els seus divisors són:

$$\text{Div}(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$
$$\text{Div}(42) = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$$
$$\text{Divisors comuns} = \{1, 2, 3, \mathbf{6}\}$$

Per tant, el màxim comú divisor de 12 i 42 és: m.c.d. $(12, 42) = 6$

COM EL CALCULEM?

Per calcular el màxim comú divisor de dos nombres seguim aquests passos.

1r Descomponem els dos nombres en els seus **factors primers**.

2n Multipliquem els factors primers **comuns** dels dos, elevats a **l'exponent més petit**.

EXEMPLE

12	2
6	2
3	3
1	

$12 = 2^2 \cdot 3$

42	2
21	3
7	7
1	

$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$

m.c.d. $(12, 42) = 2 \cdot 3 = 6$

ACTIVITATS

1 Calcula el màxim comú divisor d'aquests nombres, descomponent en factors primers.

a) 21 i 105

21	3
7	7
1	

105	3
35	5
7	7
1	

$21 = 3 \cdot 7$ $105 = 3 \cdot \square \cdot \square$

m.c.d. $(21, 105) = \square \cdot \square = 21$

c) 60 i 210

60	2
—	—
—	—
—	—

210	2
—	—
—	—
—	—

$60 = 2^2 \cdot \square \cdot \square$ $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

m.c.d. $(60, 210) = \square \cdot \square \cdot \square = 30$

b) 33 i 44

33	3
11	11
1	

44	—
—	—
11	—
1	

$33 = 3 \cdot \square$ $44 = 2^2 \cdot \square$

m.c.d. $(33, 44) = 11$

d) 45 i 80

45	3
15	—
—	—
1	

80	—
—	—
—	—
—	—
5	5
1	

$45 = 3^2 \cdot \square$ $80 = 2^4 \cdot \square$

m.c.d. $(45, 80) = 5$

CALCULAR EL MÍNIM COMÚ MÚLTIPLE (m.c.m.) DE DOS NOMBRES

Nom: Curs: Data:

El mínim comú múltiple de dos nombres és el **més petit** dels seus **múltiples comuns**.

EXEMPLE

Siguin els nombres 12 i 42. Els seus múltiples són: Múltiples de 12 = {0, 12, 24, 36, 48, 60, **84**, 96, ...}

Múltiples de 42 = {0, 42, **84**, 126, ...}

Per tant, el mínim comú múltiple de 12 i 42 és: m.c.m. (12, 42) = 84

COM EL CALCULEM?

Per calcular el mínim comú múltiple de dos nombres seguim aquests passos.

1r Descomponem els dos nombres en els seus **factors primers**.

2n Multipliquem els factors primers **comuns** i **no comuns** als dos nombres que estiguin elevats a l'**exponent més gran**.

EXEMPLE

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad 12 = 2^2 \cdot 3 \qquad \begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \qquad \text{m.c.m. } (12, 42) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$$

ACTIVITATS

1 Calcula el mínim comú múltiple d'aquests nombres, descomponent en factors primers.

a) 21 i 105

$$\begin{array}{r|l} 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$21 = \square \cdot \square$ $\quad 105 = \square \cdot \square \cdot \square$

m.c.m. (21, 105) = $\square \cdot \square \cdot \square$ = 105

b) 33 i 88

$$\begin{array}{r|l} 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 88 & 2 \\ 44 & — \\ — & — \\ 11 & — \\ 1 & \end{array}$$

$33 = 3 \cdot \square$ $\quad 88 = 2^3 \cdot \square$

m.c.m. (33, 88) = $\square \cdot \square \cdot \square$ = 264

c) 60 i 210

$$\begin{array}{r|l} 60 & — \\ 30 & — \\ 15 & — \\ 5 & — \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 210 & — \\ 105 & — \\ 35 & — \\ 7 & — \\ 1 & \end{array}$$

$60 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ $\quad 210 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

m.c.m. (60, 210) = $\square \cdot \square \cdot \square \cdot \square$ = 420

d) 45 i 80

$$\begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & — \\ — & — \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 80 & — \\ — & — \\ — & — \\ — & — \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

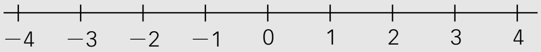
$45 = 3^2 \cdot \square$ $\quad 80 = 2^4 \cdot \square$

m.c.m. (45, 80) = $\square \cdot \square \cdot \square$ = 720

REPRESENTAR NOMBRES ENTERS I OPERAR-HI

Nom: Curs: Data:

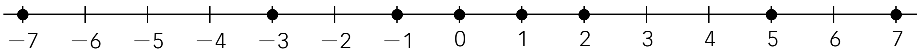
Representem els nombres enters positius i negatius sobre una recta dividida en intervals de la mateixa longitud.



EXEMPLE

Representa i ordena, de més petit a més gran, els següents nombres enters: 7, −1, −3, 5, 0, 1, 5, −7 i 2.

Els representem sobre la recta:



L'ordenació és immediata: $-7 < -3 < -1 < 0 < 1 < 2 < 5 < 7$

ACTIVITATS

1 Representa i ordena aquests nombres enters: −4, −5, 4, 5, −2, 2, −7 i 7.

2 Indica el signe < (més petit que) o > (més gran que), segons el que correspongui en cada cas.

a) $-5 > -7$

b) $0 \ \square\ 9$

c) $5 \ \square\ 7$

d) $-5 \ \square\ -1$

e) $-3 \ \square\ 0$

f) $4 \ \square\ 1$

VALOR ABSOLUT D'UN NOMBRE ENTER

- El valor absolut d'un enter positiu és ell mateix: $|3| = 3, |0| = 0$
- El valor absolut d'un enter negatiu és el seu oposat: $|-3| = 3, |-15| = 15$

3 Opera i calcula el valor absolut dels nombres enters.

a) $|3 - 5| = |-2| = 2$

b) $|3 - 7 + 2 - 5| = |\square| = \square$

c) $|(-1) \cdot (4 - 5)| = |(-1) \cdot (\square)| = |\square| = \square$

d) $|(2 - 3) \cdot (7 - 5)| = |(-1) \cdot (\square)| = |\square| = \square$

e) $|(-4) : (7 - 8)| = |(-4) : (\square)| = |\square| = \square$

4 Efectua les operacions següents amb nombres enters.

a) $[(-2)^2 + 2^3] : (-2) = [\square + \square] : (-2) = \square : (-2) = -6$

b) $3 \cdot [1 - 4 + 2] - (-3) \cdot [5 - (7 - 3)] = 3 \cdot (\square) - (-3) \cdot [5 - \square] = \square + \square = \square$

c) $[(-2)^2 \cdot 6^2] : 3^2 = [4 \cdot 36] : 9 = \square : 9 = 16$

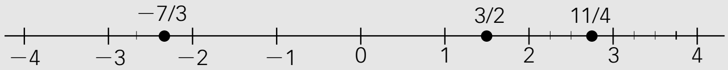
d) $|(-1) \cdot 3 - 2 \cdot (-3 + 5)| = |(-1) \cdot 3 - 2 \cdot 2| = |-\square - \square| = |\square| = 7$

e) $|[(-5 + 3) \cdot 5] : (2 - 7)| = |[(-2) \cdot 5] : (-5)| = |(\square) : (-5)| = 2$

REPRESENTAR NOMBRES RACIONALS I OPERAR-HI

Nom: Curs: Data:

Representem els nombres racionals sobre una recta, en la qual els nombres fraccionaris estan compresos entre els nombres enters.



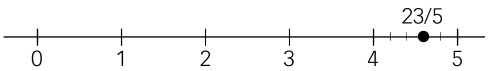
Per veure com es representa un nombre fraccionari, en mostrem un exemple. Així, per representar el nombre $\frac{138}{30}$ seguim aquests passos.

1r Simplifiquem la fracció fins a obtenir-ne la fracció irreductible: $\frac{138}{30} = \frac{69}{15} = \frac{23}{5}$

2n Calculem la part entera i la part decimal: $\frac{23}{5} = 4 + \frac{3}{5}$

3r Prenem sobre la recta l'interval format pels dos nombres enters entre els quals està comprès el nombre, en aquest cas [4, 5], i el dividim en un nombre de parts igual que el denominador de la fracció, en aquest cas en 5 parts.

Marquem des del nombre 4 tantes parts com indiqui el numerador, en aquest cas 3:



ACTIVITATS

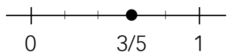
1 Representa els nombres fraccionaris següents.

a) $\frac{540}{900}$

1r Simplifiquem: $\frac{540}{900} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{3}{5}$

2n Calculem: $\frac{3}{5} = 0 + \frac{\quad}{\quad}$

3r Senyalem sobre la recta l'interval [0, 1].
El dividim en 5 parts iguals.
Marquem 3 parts i indiquem la posició.

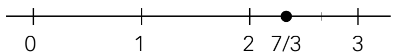


b) $\frac{420}{180}$

1r Simplifiquem: $\frac{420}{180} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{7}{3}$

2n Calculem: $\frac{7}{3} = 2 + \frac{\quad}{\quad}$

3r Senyalem sobre la recta l'interval [2, 3].
El dividim en 3 parts iguals.
Marquem 1 part i indiquem la posició.

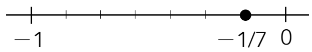


c) $-\frac{210}{1470}$

1r Simplifiquem: $-\frac{210}{1470} = -\frac{\quad}{\quad} = -\frac{\quad}{\quad} = -\frac{\quad}{\quad} = -\frac{1}{7}$

2n Calculem: $-\frac{1}{7} = 0 - \quad -\frac{1}{7}$

3r Senyalem sobre la recta l'interval [0, −1]
i representem la fracció.



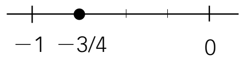
REPRESENTAR NOMBRES RACIONALS I OPERAR-HI

Nom: Curs: Data:

d) $-\frac{450}{600}$ 1r Simplifiquem: $-\frac{450}{600} = -\frac{}{} = -\frac{}{} = -\frac{}{} = -\frac{3}{4}$

2n Calculem: $-\frac{3}{4} = 0 - -\frac{3}{4}$

3r Senyalem sobre la recta l'interval [0, −1] i la fracció.



SUMA (O RESTA) DE NOMBRES RACIONALS

Per sumar (o restar) fraccions amb **diferent** denominador, les reduïm a **comú** denominador i després sumem els numeradors.

EXEMPLE

Efectua: $\frac{3}{5} - 2 + \frac{17}{3}$

Calculem el mínim comú múltiple dels denominadors: m.c.m. (3, 5) = 15

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{9}{15} \qquad 2 = \frac{2 \cdot 15}{15} = \frac{30}{15} \qquad \frac{17}{3} = \frac{17 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{85}{15}$$

$$\frac{3}{5} - 2 + \frac{17}{3} = \frac{9}{15} - \frac{30}{15} + \frac{85}{15} = \frac{9 - 30 + 85}{15} = \frac{64}{15}$$

2 Fes les operacions següents.

a) $4 - \frac{5}{3} - \frac{3}{2}$ m.c.m. (2, 3) =

$$4 = \frac{4 \cdot \square}{\square} \qquad \frac{5}{3} = \frac{5 \cdot \square}{3 \cdot \square} = \frac{\square}{\square} \qquad \frac{3}{2} = \frac{3 \cdot \square}{2 \cdot \square} = \frac{\square}{\square}$$

$$4 - \frac{5}{3} - \frac{3}{2} = \frac{}{} - \frac{}{} - \frac{}{} = \frac{ - - }{} = \frac{5}{6}$$

b) $\frac{5}{2} - \left[1 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right)\right]$ m.c.m. (3, 4) = 12

Fem en primer lloc la suma del parèntesi:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot \square}{12} + \frac{1 \cdot \square}{12} = \frac{\square + \square}{12} = \frac{11}{12}$$

$$\frac{5}{2} - \left[1 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right)\right] = \frac{5}{2} - \left[1 - \frac{11}{12}\right] = \frac{5}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5 \cdot \square}{12} - \frac{1}{12} = \frac{\square - \square}{12} = \frac{29}{12}$$

c) $3 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$ m.c.m. (3, 5) = 15

Fem en primer lloc la resta del parèntesi:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{1 \cdot \square}{15} - \frac{1 \cdot \square}{15} = \frac{\square - \square}{15} = \frac{2}{15}$$

$$3 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = 3 - \frac{2}{15} = \frac{3 \cdot \square}{15} - \frac{2}{15} = \frac{43}{15}$$

REPRESENTAR NOMBRES RACIONALS I OPERAR-HI

Nom: Curs: Data:

PRODUCTE (O QUOCIENT) DE NOMBRES RACIONALS

- Per multiplicar dues fraccions, fem el producte dels numeradors i el dividim entre el producte dels denominadors.
- Per dividir dues fraccions, multipliquem la primera fracció per la inversa de la segona.

EXEMPLE

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\cdot\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{7}}=\frac{1\cdot 5}{3\cdot 7}=\frac{5}{21}$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}:\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{7}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{5}=\frac{1\cdot 7}{3\cdot 5}=\frac{7}{15}$$

$$\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}:\mathbf{3}=\frac{2}{5}:\frac{3}{1}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2\cdot 1}{5\cdot 3}=\frac{2}{15}$$

3 Fes les operacions següents.

a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{(-1)}{5}\cdot\frac{7}{2}=\frac{\square\cdot(\square)\cdot\square}{\square\cdot\square\cdot\square}=\frac{}{}$

b) $\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}\right):\frac{(-3)}{7}=\left(\frac{\square}{\square}\right)\cdot\frac{7}{(-3)}=\frac{\square\cdot\square}{\square\cdot(-3)}=\frac{}{}$

c) $\left[3\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\right]:\left[(-5):\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{\square\cdot\ (-2)}{\square}\right]:\left[(-5)\cdot\frac{2}{1}\right]=\left(\frac{}{}\right):\left(\frac{}{}\right)=\left(\frac{}{}\right)\cdot\left(\frac{}{}\right)=\left(\frac{}{}\right)=\frac{3}{100}$

d) $\left(\frac{1}{3}:\frac{5}{7}\right)\cdot\left(7:\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{5}\right)\cdot\left(7\cdot\frac{2}{1}\right)=\left(\frac{}{}\right)\cdot\left(\frac{}{}\right)=\frac{}{}$

POTÈNCIA D'UNA FRACCIÓ

Per elevar una fracció a una potència, s'eleven el numerador i el denominador a aquesta potència.

EXEMPLE

$$\left(-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}\right)^{\mathbf{3}}=\frac{(-3)^3}{5^3}=\frac{-27}{125}$$

4 Fes aquestes operacions.

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{}{}-\frac{}{}=\frac{\square-\square}{200}=\frac{\square-\square}{200}=\frac{667}{200}$

b) $5-\left(\frac{1}{3}\right)^3=5-\frac{1}{\square}=\frac{\square-\square}{27}=\frac{134}{27}$

c) $3+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2=3+\frac{}{}-\frac{}{}=\frac{\square+\square-\square}{36}=\frac{113}{36}$

REPRESENTAR NOMBRES RACIONALS I OPERAR-HI

Nom: Curs: Data:

OPERACIONS COMBINADES AMB NOMBRES RACIONALS

La jerarquia de les operacions és:

- Primerament es fan les operacions de l'interior dels parèntesis.
- Després, es calculen les potències, si n'hi ha.
- A continuació, s'efectuen les multiplicacions i divisions.
- Per últim, es resolen les sumes i restes.
- Sempre s'opera respectant l'ordre en què estan escrites les operacions, d'esquerra a dreta.

EXEMPLE

$$\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{5}\right):\left(3-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right)$$

Hi ha dos blocs, amb els quals hem d'operar per separat:

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{5}=\frac{3\cdot 5}{2\cdot 5}+\frac{1\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{15}{10}+\frac{2}{10}=\frac{17}{10}$$

$$3-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}=\frac{3\cdot 7\cdot 2}{7\cdot 2}-\frac{1\cdot 2}{7\cdot 2}+\frac{1\cdot 7}{2\cdot 7}=\frac{42}{14}-\frac{2}{14}+\frac{7}{14}=\frac{42-2+7}{14}=\frac{47}{14}$$

Operem i simplifiquem:

$$\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{5}\right):\left(3-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right)=\frac{17}{10}:\frac{47}{14}=\frac{17\cdot 14}{10\cdot 47}=\frac{238}{470}=\frac{119}{235}$$

5 Efectua les operacions.

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^3-\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{7-4}\right]=\left(\frac{1}{5}\right)^3-\left(\frac{1}{5}\right)^3=0$

b) $\left(1+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{\square+\square}{3}\right)-\left(\frac{\square+\square}{4}\right)+\left(\frac{\square-\square}{12}\right)=\frac{}{}-\frac{}{}+\frac{}{}=$

$$=\frac{\square-\square+\square}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

c) $\dfrac{3+\frac{1}{7}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{14}}=\dfrac{\frac{\square+\square}{7}}{\frac{\square+\square}{14}}=\frac{}{7}\cdot\frac{14}{}=\frac{308}{70}=\frac{154}{35}=\frac{22}{5}$

d) $\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)+\left(3-\frac{1}{2}\right)-\left(2+\frac{1}{5}\right)=\frac{}{}+\frac{}{2}-\frac{}{5}=\frac{\square+\square-\square}{30}=-\frac{16}{30}$

e) $\left(2-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(3+\frac{1}{2}\right):\left(4-\frac{2}{3}\right)=\frac{}{5}\cdot\frac{}{2}\cdot\frac{}{3}=\frac{}{5}\cdot\frac{}{2}\cdot\frac{3}{}=\frac{189}{100}$

EXPRESSAR UN NOMBRE DECIMAL EN FORMA DE FRACCIÓ

Nom: Curs: Data:

Per expressar un nombre fraccionari en **forma decimal** es divideix el numerador entre el denominador.

EXEMPLE

a) $\frac{\mathbf{49}}{\mathbf{20}} = 2{,}45 \rightarrow$ decimal exacte

b) $\frac{\mathbf{86}}{\mathbf{11}} = 7{,}8181\ldots = 7{,}\widehat{81} \rightarrow$ decimal periòdic pur

c) $\frac{\mathbf{87}}{\mathbf{66}} = 1{,}31818\ldots = 1{,}3\widehat{18} \rightarrow$ decimal periòdic mixt

Per passar un nombre en forma decimal a fracció, operem de manera diferent en cada un dels tres casos anteriors.

EXEMPLE

a) Decimal exacte:

$$2{,}4625 = \frac{24\,625}{10\,000} = \frac{4\,925}{2\,000} = \frac{985}{400} = \frac{197}{80}$$

b) Decimal periòdic pur:

Es resta la part entera

$$3{,}\widehat{45} = \frac{345 - 3}{99} = \frac{342}{99} = \frac{114}{33} = \frac{38}{11}$$

Es posen tants 9 com xifres tingui la part periòdica

c) Decimal periòdic mixt:

Xifres de la part entera i la part decimal no periòdica

$$3{,}21\widehat{7} = \frac{3\,217 - 321}{900} = \frac{2\,896}{900} = \frac{1448}{450} = \frac{724}{225}$$

Es posen tants 9 com xifres tingui la part periòdica i tants 0 com xifres tingui la part anteperiòdica

ACTIVITATS

1 Calcula la fracció generatriu d'aquests nombres.

a) $0{,}87 = \frac{87}{100}$

b) $0{,}\widehat{3} = \underline{\qquad} = \frac{1}{3}$

c) $3{,}15\widehat{27} = \frac{31\,527 - 315}{9\,900} =$

$= \underline{\qquad} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$

d) $2{,}\widehat{45} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad} = \frac{27}{11}$

e) $0{,}0\widehat{15} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad} = \frac{1}{66}$

f) $-235{,}75 = -\underline{\qquad} = -\underline{\qquad} = -\underline{\qquad}$

g) $6{,}\widehat{2} = \frac{\square - \square}{\square} = \underline{\qquad}$

APROXIMAR UN NOMBRE DECIMAL

Nom: Curs: Data:

Per **truncar** les xifres decimals d'un nombre fins a un ordre determinat, eliminem les xifres que vénen a continuació d'aquest ordre.

EXEMPLE

5,751 truncat a les dècimes és 5,7.
0,837 truncat a les centèsimes és 0,83.
12,3146 truncat a les mil·lèsimes és 12,314.

ACTIVITATS

1 Trunca els nombres decimals a la xifra de les dècimes, centèsimes i mil·lèsimes.

a) 0,2765	b) 12,34	c) 8,7521	d) 361,4938
0,2	______	______	______
0,27	______	______	______
0,276	______	______	______

Per **arrodonir** un nombre decimal fins a un ordre determinat mirem si la xifra del següent ordre és més petita que 5 o més gran o igual que 5 i, en funció d'això, deixem la xifra anterior com està o la incrementem en una unitat.

EXEMPLE

5,751 arrodonit a les dècimes és 5,8.
0,837 arrodonit a les centèsimes és 0,84.
12,3146 arrodonit a les mil·lèsimes és 12,315.

2 Arrodoneix els nombres decimals a les dècimes, centèsimes i mil·lèsimes.

a) 0,2765	b) 12,3453	c) 8,7521	d) 361,4932
0,3	______	______	______
0,28	______	______	______
0,277	______	______	______

3 Fes les operacions amb nombres decimals i arrodoneix el resultat a les centèsimes.

a) $(1,367 + 4,875) \cdot 2 =$ ______ $\cdot 2 =$ ______ $= 12,48$

b) $(3,642 - 2,485) - (9,675 + 1,476) =$ ______ $-$ ______ $=$ ______ $= -9,99$

c) $\left(\dfrac{43,764}{2,15} \cdot 3,831\right) - \left(\dfrac{74,772}{13,57} \cdot 5,63\right) =$ ______ $-$ ______ $= 46,96$

d) $\sqrt{37} - \sqrt{22} =$ ______ $-$ ______ $=$ ______ $= 1,39$

e) $\dfrac{35,732 - 20,189}{63,562 - 18,987} =$ ______ $= 0,35$

CALCULAR L'ERROR QUE COMETEM EN APROXIMAR UN NOMBRE DECIMAL

Nom: Curs: Data:

L'**error absolut** que cometem en aproximar un nombre decimal és igual al valor absolut de la diferència entre el nombre donat i el nombre aproximat. Es representa per $\boldsymbol{E_a}$.

EXEMPLE

Sigui el nombre 3,5765. Quin error absolut es comet en aproximar-lo a les centèsimes?

Podem aproximar el nombre de dues maneres: truncant-lo o arrodonint-lo.

Si el trunquem a les centèsimes, el nombre és 3,57, i l'error absolut seria:

$$E_a = |3{,}5765 - 3{,}57| = 0{,}0065$$

Si l'arrodonim a les centèsimes, el nombre és 3,58, i l'error absolut seria:

$$E_a = |3{,}5765 - 3{,}58| = 0{,}0035$$

Com que l'error comès en arrodonir és menor, aquesta forma d'aproximació és millor que el truncament.

ACTIVITATS

1 Calcula l'error que cometem en aproximar els següents nombres decimals a les mil·lèsimes.

a) 35,3277

Per truncament queda 35,327.
$E_a = |35{,}3277 - \underline{\qquad\qquad}| = 0{,}0007$

Per arrodoniment queda 35,328.
$E_a = |\underline{\qquad\qquad} - 35{,}3277| = 0{,}0003$

b) 107,8912

Per truncament queda: ____________
$E_a = |107{,}8912 - \underline{\qquad\qquad}| = 0{,}0002$

Per arrodoniment queda: ____________
$E_a = |107{,}8912 - \underline{\qquad\qquad}| = 0{,}0002$

El màxim error absolut que cometem en fer una aproximació es diu **cota** o **marge d'error**.

EXEMPLE

En calcular amb la calculadora el valor de $\sqrt{3}$, obtenim:

$$\sqrt{3} = 1{,}7320508$$

Però aquesta és una aproximació per arrodoniment que fa la calculadora a 7 xifres decimals, de manera que no és el valor exacte de $\sqrt{3}$.

Com que no podem calcular l'error absolut, ja que no en coneixem el valor exacte, calcularem una cota de l'error absolut comès. Si aproximem, per exemple, a les centèsimes:

$$1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$$

L'error que cometem serà més petit o, com a màxim, igual que la diferència entre 1,73 i 1,74, és a dir: $1{,}74 - 1{,}73 = 0{,}01$.

Així, resulta que 0,01 és una cota de l'error comès en aproximar $\sqrt{3}$ a les centèsimes.

2 Calcula una cota d'error en aproximar $\sqrt{3}$ a les mil·lèsimes.

$1{,}73\mathbf{2} < \sqrt{3} < 1{,}73\mathbf{3}$ $\qquad$ $1{,}73\mathbf{3} - 1{,}73\mathbf{2} = \underline{\qquad\qquad}$

CALCULAR L'ERROR QUE COMETEM EN APROXIMAR UN NOMBRE DECIMAL

Nom: Curs: Data:

3 Calcula la cota d'error en aproximar els nombres a les dècimes i a les centèsimes.

a) $\frac{3}{7}$ $\frac{3}{7} = 0{,}42857\ldots$

Per a l'aproximació a les dècimes:

$$0{,}4 < \frac{3}{7} < \_\_\_\_$$

per tant, la cota d'error serà:

$$0{,}5 - 0{,}4 = \_\_\_\_$$

Per a l'aproximació a les centèsimes:

$$0{,}42 < \frac{3}{7} < \_\_\_\_$$

per tant, la cota d'error serà:

$$0{,}43 - 0{,}42 = \_\_\_\_$$

b) $\frac{3}{11}$ $\frac{3}{11} = 0{,}272727$

Per a l'aproximació a les dècimes:

$$0{,}2 < \frac{3}{11} < \_\_\_\_$$

per tant, la cota d'error serà:

$$0{,}3 - 0{,}2 = \_\_\_\_$$

Per a la aproximació a les centèsimes:

$$0{,}27 < \frac{3}{11} < \_\_\_\_$$

per tant, la cota d'error serà:

$$0{,}28 - 0{,}27 = \_\_\_\_$$

c) $2{,}3\widehat{5}$ $2{,}3\widehat{5} = 2{,}35555\ldots$

Per a l'aproximació a les dècimes:

$$2{,}3 < 2{,}3\widehat{5} < \_\_\_\_$$

per tant, la cota d'error serà:

$$\_\_\_\_ - \_\_\_\_ = 0{,}1$$

Per a l'aproximació a les centèsimes:

$$2{,}35 < 2{,}3\widehat{5} < \_\_\_\_$$

per tant, la cota d'error serà:

$$2{,}36 - 2{,}35 = 0{,}01$$

d) $\sqrt{7}$ $\sqrt{7} = 2{,}64575$

Per a l'aproximació a les dècimes:

$$2{,}6 < \sqrt{7} < \_\_\_\_$$

per tant, la cota d'error serà:

$$\_\_\_\_ - \_\_\_\_ = 0{,}1$$

Per a l'aproximació a les centèsimes:

$$2{,}64 < \sqrt{7} < \_\_\_\_$$

per tant, la cota d'error serà:

$$2{,}65 - 2{,}64 = 0{,}01$$

L'**error relatiu** que cometem en aproximar un nombre decimal és el quocient entre el seu error absolut i el valor exacte d'aquest nombre. Es representa per $\boldsymbol{E_r}$.

EXEMPLE

Sigui el nombre 3,5765. Quin error relatiu es comet en aproximar-lo per truncament a les centèsimes? I a les mil·lèsimes?

Si el trunquem a les centèsimes, el nombre és 3,57, i l'error absolut E_a seria:

$$E_a = |3{,}5765 - 3{,}57| = 0{,}0065$$

L'error relatiu, en aquest cas, és: $E_r = \left|\frac{0{,}0065}{3{,}5765}\right| = 0{,}001817$

Si el trunquem a les mil·lèsimes, el nombre és 3,576, i l'error absolut E_a seria:

$$E_a = |3{,}5765 - 3{,}576| = 0{,}0005$$

L'error relatiu, en aquest cas, és: $E_r = \left|\frac{0{,}0005}{3{,}5765}\right| = 0{,}000139$

Una altra manera d'expressar l'error relatiu és amb el tant per cent:

Per a les centèsimes: $E_r = 0{,}001817 = 0{,}18\,\%$ Per a les mil·lèsimes: $E_r = 0{,}000139 = 0{,}01\,\%$

Hem arrodonit l'error, per expressar el tant per cent (%) amb dues xifres decimals.

CALCULAR L'ERROR QUE COMETEM EN APROXIMAR UN NOMBRE DECIMAL

Nom: Curs: Data:

4 Calcula l'error relatiu que cometem en aproximar per truncament a les centèsimes.

a) $\frac{5}{7}$ $\quad \frac{5}{7} = 0{,}71428\ldots$

L'error absolut serà:

$$E_a = \left|\frac{5}{7} - 0{,}71\right| = \_\_\_\_\_\_$$

L'error relatiu serà:

$$E_r = \left|\frac{0{,}00428}{0{,}71428}\right| = 0{,}005992 = 0{,}60\,\%$$

b) $\frac{7}{9}$ $\quad \frac{7}{9} = 0{,}77777\ldots$

L'error absolut serà:

$$E_a = \left|\frac{7}{9} - 0{,}77\right| = \_\_\_\_\_\_$$

L'error relatiu serà:

$$E_r = \left|\frac{0{,}00777}{0{,}77777}\right| = 0{,}00999 = 1\,\%$$

c) $3{,}87\widehat{5}$ $\quad 3{,}87\widehat{5} = 3{,}87555\ldots$

L'error absolut serà:

$$E_a = |3{,}87555 - 3{,}87| = 0{,}00555$$

L'error relatiu serà:

$$E_r = \left|\frac{0{,}00555}{3{,}87555}\right| = 0{,}001432 = \_\_\_\_\,\%$$

d) $\sqrt{7}$ $\quad \sqrt{7} = 2{,}64575\ldots$

L'error absolut serà:

$$E_a = |\sqrt{7} - 2{,}64| = 0{,}00575$$

L'error relatiu serà:

$$E_r = \left|\frac{0{,}00575}{2{,}64575}\right| = 0{,}00217 = \_\_\_\_\,\%$$

5 Després de mesurar diverses vegades amb una cinta mètrica, graduada en centímetres, l'alçada d'un company de classe, hem obtingut els valors següents.

MESURES	177	173	175	174	177	174	174	173	175	172

Calcula la mitjana d'aquestes mesures i l'error relatiu comès.

El valor mitjà d'aquestes mesures serà:

$$\text{alçada mitjana} = \frac{177 + \square + \square + \square + \square + \square + \square + \square + \square + \square}{10} = \frac{1\,744}{10} = 174{,}4 \text{ cm}$$

L'error absolut comès en cada una de les mesures l'obtenim restant la mitjana de cada mesura i calculant-ne el valor absolut:

MESURES	177	173	175	174	177	174	174	173	175	172
ERROR ABSOLUT	$\|177 - 174{,}4\| = 2{,}6$	$\|173 - 174{,}4\| = 1{,}4$	0,6	0,4	2,6	0,4	0,4	1,4	0,6	2,4

La mitjana dels errors absoluts serà:

$$\frac{2{,}6 + \square + \square + \square + \square + \square + \square + \square + \square + \square}{10} = \frac{12{,}8}{10} = 1{,}28 = 1{,}3$$

L'alçada del company és: 174,4 ± 1,3 cm, i l'error relatiu comés és:

$$\left|\frac{1{,}3}{174{,}4}\right| = 0{,}00745 = 0{,}75\,\%$$

RESOLDRE PROBLEMES AMB PERCENTATGES

Nom: Curs: Data:

ACTIVITATS

1 En un diari local llegim que per al proper pont el 38 % de les places hoteleres de la regió ja estan reservades. Sabent que el nombre total de places és de 850, calcula les places que estan ja reservades i les places que encara queden lliures.

2 En una escola juguen a bàsquet 169 alumnes, que representen el 26 % del total dels alumnes. Quants alumnes té l'escola? I quants no juguen a bàsquet?

AUGMENTS I DISMINUCIONS PERCENTUALS

Per calcular en què es transforma una quantitat Q quan augmenta o disminueix en un p %, es multiplica aquesta quantitat per l'índex de variació:

$Q(1 + p/100)$, si augmenta.

$Q(1 - p/100)$, si disminueix.

3 Per fomentar l'ús del transport públic en una ciutat, s'ha decidit rebaixar un 7 % el preu del bitllet d'autobús, que era de 0,80 €, i augmentar un 11 % el preu d'1 hora d'aparcament, que era de 1,20 €. Calcula els nous preus del bitllet i de l'aparcament.

4 L'any passat a la meva escola hi havia 72 alumnes que jugaven a futbol, però enguany són 108 alumnes. Quin ha estat el percentatge d'augment?

RESOLDRE PROBLEMES AMB PERCENTATGES

Nom: Curs: Data:

Per calcular augments o disminucions percentuals successius, es multipliquen els índexs de variació: $(1 + p)$ per als augments i $(1 - p)$ per a les disminucions.

EXEMPLE

Al llarg de l'any, la xifra de desocupats d'una comunitat ha anat variant segons aquests augments i disminucions percentuals.

GEN	FEB	MARÇ	ABR	MAIG	JUNY	JUL	AGO	SET	OCT	NOV	DES
+2%	+3%	+4%	−2%	−1%	−3%	−5%	0%	0%	+3%	+3%	+2%

Si al començament de l'any hi havia 380 000 desocupats en aquella comunitat, calcula els desocupats que hi ha en acabar l'any.

Calculem en primer lloc els successius índexs de variació:

GEN	FEB	MARÇ	ABR	MAIG	JUNY	JUL	AGO	SET	OCT	NOV	DES
1,02	1,03	1,04	0,98	0,99	0,97	0,95	1	1	1,03	1,03	1,02

Multipliquem els successius índexs de variació:

$$1{,}02 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}04 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}99 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}95 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}02 = 1{,}06$$

El nombre de desocupats en acabar l'any serà: $380\,000 \cdot 1{,}06 = 402\,800$ persones

Ha augmentat un 6 %, com veiem per l'índex de variació total.

5 L'entrada d'un cinema costa 4,50 €, però m'apliquen un descompte del 20 %. Com que, a més, és el dia de l'espectador, m'apliquen un descompte addicional del 30 %. Calcula quant em costa l'entrada.

6 El preu d'un model de cotxe ha experimentat les següents variacions al llarg dels últims cinc anys.

2012	2013	2014	2015	2016
+2,5%	+3%	0%	−1,5%	−2%

Si el preu en 2012 era de 15 000 €, calcula quin serà el preu en 2016.

CALCULAR L'INTERÈS SIMPLE O L'INTERÈS COMPOST

Nom: Curs: Data:

Si dipositem un capital C en una entitat bancària que funciona amb un tant per cent d'interès r i retirem periòdicament el benefici obtingut, estem davant d'un cas d'**interès simple**, i es calcula així:

$$i = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}, \text{ si el temps } t \text{ ve donat en anys.}$$

EXEMPLE

En Lluís ingressa 200 € en un compte bancari al 4 % d'interès anual simple i vol saber quants diners tindrà al cap de dos anys.

Podem calcular l'interès que li rendeixen 200 € a l'any aplicant una regla de tres simple:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si per } 100\text{ €} \rightarrow 4\text{ € d'interès en 1 any} \\ \text{per } 200\text{ €} \rightarrow x_1\text{ € d'interès en el 1r any} \end{array}\right\} \rightarrow x_1 = 8\text{ €}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si per } 100\text{ €} \rightarrow 4\text{ € d'interès en 1 any} \\ \text{per } 200\text{ €} \rightarrow x_2\text{ € d'interès en el 2n any} \end{array}\right\} \rightarrow x_2 = 8\text{ €}$$

Al final del primer any tindrà: $200 + 8 = 208$ € en el compte.

Al final del segon any tindrà: $200 + 16 = 216$ € en el compte.

Haurà guanyat 16 € en els dos anys.

Una altra manera més senzilla de calcular els interessos generats al cap dels dos anys és aplicant la fórmula:

$$i = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} = \frac{200 \cdot 4 \cdot 2}{100} = 16\text{ €}$$

Per tant, el capital acumulat és: $200 + 16 = 216$ €

ACTIVITATS

1 Calcula quant temps s'ha de tenir un capital de 600 € a un interès simple del 4% perquè es dupliqui.

2 Calcula quants euros caldria ingressar i mantenir durant 5 anys en un compte, al 5% d'interès simple, perquè els interessos obtinguts al llarg dels 5 anys siguin 100 €.

CALCULAR L'INTERÈS SIMPLE O L'INTERÈS COMPOST

Nom: Curs: Data:

Si els interessos generats durant el primer any (mes o dia, depenent de com sigui el tant per cent d'interès) se sumen al capital inicial, de manera que donin un nou capital sobre el qual actuarà el tant per cent d'interès, estem davant d'un cas d'**interès compost**.

Per calcular el capital final C_f que s'obté a partir d'un capital inicial C en t anys al tant per cent anual r, apliquem aquesta fórmula.

$$C_f = C\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

L'interès generat al cap d'aquests t anys serà el capital final menys el capital inicial: $i = C_f - C$

EXEMPLE

En Lluís vol saber si li convé ingressar els 200 € en un compte jove al 4 % d'interès anual compost, i per saber-ho necessita calcular quants diners s'hauran generat al cap de 2 anys i quin capital tindrà aleshores.

Al final del primer any, l'interès generat serà de 8 € (igual que amb l'interès simple), però sobre el capital, al final del primer any, s'aplicaran els interessos, i serà: $C_1 = C + i_1 = 200 + 8 = 208$ €.

Al final del segon any, l'interès generat durant l'any és:

$$i_2 = 208 \cdot \frac{4}{100} = 8{,}32 \text{ €}$$

I el capital acumulat és: $C_2 = C_1 + i_2 = 208 + 8{,}32 = 216{,}32$ €

Així, els interessos generats en els dos anys són: $i_1 + i_2 = 8 + 8{,}32 = 16{,}32$ €

Si apliquem directament la fórmula per a aquest tipus d'interès, tenim que:

$$C_f = C\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = 200 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^2 = 200 \cdot 1{,}04^2 = 216{,}32 \text{ €}$$

I els interessos generats són: $i = C_f - C = 216{,}32 - 200 = 16{,}32$ €

Per tant, veiem que els interessos generats i el capital final al cap dels dos anys són més en el compte a interès compost. Aquesta diferència es fa més gran com més anys transcorren.

Normalment, els comptes en bancs i caixes d'estalvi funcionen a interès compost.

3 **Una persona obre un compte d'estalvi al 2,5 % d'interès compost, i ingressa 15 000 €, que manté durant 15 anys.**

a) Quin serà el capital final i quins interessos se li hauran abonat al cap dels 15 anys?

b) I si manté els diners en el compte durant 20 anys?

Nom: Curs: Data:

ACTIVITATS

1 Si a i b són dos nombres reals i $a < b$, què passa amb els seus oposats? I amb els seus inversos? Respon raonadament.

2 Hi ha relacions mètriques, tant en la naturalesa com en construccions o en la vida quotidiana, en les quals apareix el nombre auri, $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Es pot representar aquest nombre de forma exacta en la recta numèrica? Raona la resposta.

3 Escriu el nombre $\frac{1}{7}$ en forma decimal amb la mínima quantitat de xifres perquè l'error sigui més petit que 1 centèsima.

4 Per a quin nombre seria 5 432,723 una aproximació a les mil·lèsimes per defecte? És única la resposta? Quantes n'hi ha?

5 Escriu una aproximació per defecte i per excés del nombre $e = 2{,}718281...$ Indica, en cada cas, una cota d'error absolut.

6 Considera que A, B, C i D són quatre localitats. La distància entre A i B és 48 km, amb un error de 200 m, i la distància entre C i D és 300 m, amb un error de 2,5 m. Quina mesura és més adequada? Per què?

7 Un fabricant elabora un producte que ven a un magatzemista en 3 000 €. El magatzemista li paga un 18 % d'IVA i el ven a una botiga per valor de 5 000 €. L'amo de la botiga abona un 18 % d'IVA i ven el producte al públic en 6 000 €, més el 18 % d'IVA.

a) Quant paga d'IVA cada intermediari?
b) Quin és l'IVA que, finalment, paga el consumidor?
c) Quin tant per cent representa l'IVA que paga el consumidor?

8 El preu d'una rosa el dia de Sant Jordi és de 2,40 €, que representa un augment de preu del 60 % respecte del preu que té la resta de l'any. Quin és el preu d'una rosa qualsevol altre dia de l'any?

1 **Si a i b són dos nombres reals i $a < b$, què passa amb els seus oposats? I amb els seus inversos? Respon raonadament.**

Oposats: $-a > -b$

Inversos: $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ si a i b tenen el mateix signe i $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ si a és negatiu i b positiu.

2 **Hi ha relacions mètriques, tant en la naturalesa com en construccions o en la vida quotidiana, en les quals apareix el nombre auri, $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.**

Es pot representar aquest nombre de forma exacta en la recta numèrica? Raona la resposta.

Sí, és possible. Es representa $\sqrt{5}$ (diagonal de rectangle 2×1); després, se li suma 1 (s’afegeix amb el compàs una unitat al segment $\sqrt{5}$) i es calcula el punt mitjà del segment resultant.

3 **Escriu el nombre $\frac{1}{7}$ en forma decimal amb la mínima quantitat de xifres perquè l’error sigui més petit que 1 centèsima.**

$\frac{1}{7} \simeq 0{,}14 \rightarrow \frac{1}{7} - 0{,}14 < 0{,}003$

4 **Per a quin nombre seria 5 432,723 una aproximació a les mil·lèsimes per defecte? És única la resposta? Quantes n’hi ha?**

Pot ser una aproximació del nombre 5 432,7232.

La solució no és única; hi ha infinites solucions, tantes com nombres decimals que comencen per 5 432,723…

5 **Escriu una aproximació per defecte i per excés del nombre $e = 2{,}718281...$ Indica, en cada cas, una cota d’error absolut.**

Per defecte: 2,718. Error: $0{,}000281\ldots < 0{,}0003$

Hem aproximat a les mil·lèsimes, la cota de error és més petita que 3 deumil·lèsimes.

Per excés: 2,719. Error: $0{,}000719\ldots < 0{,}0008$

La cota d’error és més petita que 8 deumil·lèsimes.

6 **Considera que A, B, C i D són quatre localitats. La distància entre A i B és 48 km, amb un error de 200 m, i la distància entre C i D és 300 m, amb un error de 2,5 m. Quina mesura és més adequada? Per què?**

Comparem els errors relatius:

$$\frac{200}{48\,000} = 0{,}0041\overset{\frown}{6} < \frac{2{,}5}{300} = 0{,}008\overset{\frown}{3}$$

És més adequada la mesura entre C i D perquè té un error relatiu menor.

7 **Un fabricant elabora un producte que ven a un magatzemista en 3 000 €. El magatzemista li paga un 18 % d’IVA i el ven a una botiga per valor de 5 000 €. L’amo de la botiga abona un 18 % d’IVA i ven el producte al públic en 6 000 €, més el 18 % d’IVA.**

a) Quant paga d’IVA cada intermediari?

b) Quin és l’IVA que, finalment, paga el consumidor?

c) Quin tant per cent representa l’IVA que paga el consumidor?

a) Magatzemista $\rightarrow$ 18% de $3000 = \frac{18}{100} \cdot 3\,000 = 540$ €

Amo de la botiga $\rightarrow$

$\rightarrow$ 18 % de $5\,000 = \frac{18}{100} \cdot 5\,000 = 900$ €

b) Consumidor $\rightarrow$ 18 % de $6\,000 = \frac{18}{100} \cdot 6\,000 = 1080$ €

c) $\frac{1080}{3\,000} = 0{,}36 \rightarrow$ L’IVA que paga el consumidor representa el 36 % del que val el producte a la fàbrica.

8 **El preu d’una rosa el dia de Sant Jordi és de 2,40 €, que representa un augment de preu del 60 % respecte del preu que té la resta de l’any. Quin és el preu d’una rosa qualsevol altre dia de l’any?**

Coneixem la part i el percentatge, i volem calcular el total.

El preu d’una rosa el dia de Sant Jordi serà el $100 + 60 = 160$ % del preu d’una rosa qualsevol altre dia de l’any.

160 % de $Q = \frac{150}{100} \cdot Q = 2{,}40$

$Q = \frac{2{,}40 \cdot 100}{160} = 1{,}5$

El preu d’una rosa qualsevol altre dia de l’any és 1,50 €.

OPERAR AMB POTÈNCIES: MULTIPLICACIÓ, DIVISIÓ I POTÈNCIA DE POTÈNCIA

Nom: Curs: Data:

MULTIPLICACIÓ DE POTÈNCIES

- Com que les potències són multiplicacions, treballarem amb elles quan multipliquem o dividim:

$$3^4 \cdot 3^3 = \overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}^{} \cdot \overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3}^{} = 3^7$$

$$5^2 \cdot 5^4 = \overbrace{5 \cdot 5}^{} \cdot \overbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}^{} = 5^{6} \leftarrow \textbf{exponent}$$

- Les potències han de tenir la **mateixa base** per unificar l'exponent.

$3^2 \cdot 5^4 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ (no es pot posar amb el mateix exponent)

- La fórmula general per **multiplicar potències de la mateixa base** és:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

ACTIVITATS

1 Fes les operacions següents.

a) $10^2 \cdot 10^5 =$

b) $7^4 \cdot 7^2 = 7^{\square}$

c) $11^3 \cdot 11^2 \cdot 11 =$

d) $3^2 \cdot 3^6 =$

e) $3^3 \cdot 3^3 \cdot 3^5 =$

f) $\square \cdot 3^5 = 3^7$

g) $11^3 \cdot 11^3 =$

h) $19^5 \cdot 19^7 =$

i) $2^2 \cdot \square = 2^5$

DIVISIÓ DE POTÈNCIES

- Per dividir potències amb la mateixa base, es deixa la base i es resten els exponents: $a^n : a^m = a^{n-m}$
- La divisió entre potències de base diferent no es pot fer i ha de quedar indicada.

EXEMPLE

$$7^5 : 7^2 = \frac{7^5}{7^2} = \frac{\cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{\cancel{7} \cdot \cancel{7}} = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$$

2 Opera amb les potències següents.

a) $5^6 : 5^4 = \dfrac{5^6}{5^4} = \dfrac{\qquad}{\qquad} = 5 \cdot 5 = \square$

b) $3^7 : 3^4 = \dfrac{\qquad}{\qquad} = \dfrac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}} = \square \cdot \square \cdot \square = \square$

c) $11^5 : 11^3 =$

d) $13^6 : 13^2 =$

e) $7^2 : 7^3 =$

3 Fes aquestes divisions.

a) $3^5 : 3^4 = \square$

b) $\square : 7^2 = 7^5$

c) $4^6 : \square = 4^3$

d) $12^7 : 12^4 = \square$

e) $5^7 : \square = 5^2$

f) $6^{12} : 6^5 = \square$

OPERAR AMB POTÈNCIES: MULTIPLICACIÓ, DIVISIÓ I POTÈNCIA DE POTÈNCIA

Nom: Curs: Data:

POTÈNCIA D'UNA POTÈNCIA

Si elevem una potència a una altra potència, el resultat és una altra potència amb la mateixa base i amb un exponent que és el producte dels exponents:

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

EXEMPLE

$\mathbf{(7^2)^3} = (7 \cdot 7)^3 = (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7) = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^6$

$\mathbf{(5^4)^2} = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5)^2 = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = 5^8$

4 Completa les operacions següents.

a) $(7^3)^4 = 7^{\square}$

b) $(3^3)^{\square} = 3^{15}$

c) $(6^2)^{\square} = 6^{12}$

d) $(9^3)^{\square} = 9^{15}$

e) $(4^2)^{\square} = 4^8$

f) $(2^5)^2 = 2^{\square}$

g) $(5^3)^4 = 5^{\square}$

h) $(10^2)^3 = 10^{\square}$

Hi ha també operacions combinades que presenten les tres operacions estudiades fins ara.

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$a^m : a^n = a^{m-n}$	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
Multiplicació	**Divisió**	**Potència d'una potència**

EXEMPLE

$$\mathbf{(2^5 \cdot 2^4) : (2^2)^3} = \frac{2^5 \cdot 2^4}{(2^2)^3} = \frac{2^9}{2^6} = 2^3$$

5 Fes aquestes operacions.

a) $(3^5 : 3^2)^3 = \left(\dfrac{\square}{\square}\right)^3 = (\square)^3 =$

b) $(5^7 : 5^3) \cdot (5^6 : 5^2) = \dfrac{\square}{\square} \cdot \dfrac{\square}{\square}$

c) $(10^3)^4 : (10^2 \cdot 10^3) =$

d) $(4^2)^3 \cdot (4^5)^2 =$

e) $(6^5 : 6^2) \cdot (6^3)^4 =$

OPERAR AMB POTÈNCIES: MULTIPLICACIÓ, DIVISIÓ I POTÈNCIA DE POTÈNCIA

Nom: ______ Curs: ______ Data: ______

POTÈNCIA D'EXPONENT NEGATIU

- En efectuar una divisió de potències, el resultat pot ser una potència d'exponent negatiu:

$$7^3 : 7^5 = \frac{7^3}{7^5} = \frac{\cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7}}{7 \cdot 7 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7}} = \frac{1}{7 \cdot 7} = \frac{1}{7^2} = 7^{-2}$$

- Si hi ha exponents negatius, podem transformar-los en una fracció: $\frac{1}{a^n}$

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{81}$$

- En general, les potències d'exponent negatiu es defineixen: $\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$
- Les potències d'exponent negatiu compleixen les propietats que ja coneixem per a les potències d'exponent natural.

6 Opera amb potències d'exponents negatius.

a) $5^2 \cdot 3^{-2} = 5^2 \cdot \frac{1}{3^{\square}} = \frac{5^2}{3^{\square}} = \frac{25}{\square}$

b) $5^2 \cdot 5^{-7} \cdot 5^3 = 5^2 \cdot \frac{1}{\square} \cdot 5^3 = \frac{5^2 \cdot 5^3}{\square} = \square$

c) $6^3 \cdot 2^{-4} = 6^3 \cdot \frac{1}{\square} = (2 \cdot 3)^3 \cdot \frac{1}{\square} = \frac{2^3 \cdot 3^3}{\square} = \square$

$6 = 2 \cdot 3$

d) $4^3 \cdot 2^{-3} \cdot 8 = 4^3 \cdot \frac{\square}{\square} \cdot 8 = (2 \cdot 2)^3 \cdot \frac{\square}{\square} \cdot 2^3 = \frac{\square}{\square} =$

$4 = 2 \cdot 2$

$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$

7 Expressa en forma de potència de la base indicada en cada cas.

OPERACIÓ	BASE	RESULTAT
$9^{-7} \cdot 9^{11}$	3	
$4^6 : 8^{-3}$	2	
$(25^9)^{-3}$	5	
$(16^{-5} : 4^3)^{-2}$	2	
$(49^{-3})^4 : 7^{-6}$	7	

EXPRESSAR UN NOMBRE EN NOTACIÓ CIENTÍFICA

Nom: Curs: Data:

Per expressar un nombre en notació científica, l'escrivim amb una sola xifra diferent de zero com a part entera i les altres xifres com a decimals, i ho multipliquem tot per una potència de 10 amb exponent igual a:

- el nombre de xifres que hem passat a la part decimal, o
- menys el nombre de posicions que hem saltat per aconseguir que la primera xifra sigui entera.

EXEMPLE

5 438 $= 5{,}438 \cdot 10^{3}$	3 xifres hem hagut de passar a decimals.
34,7 $= 3{,}47 \cdot 10^{1}$	1 xifra hem hagut de passar a decimal.
800 $= 8 \cdot 10^{2}$	2 xifres hem hagut de passar a decimals.
0,00748 $= 7{,}48 \cdot 10^{-3}$	3 salts hem hagut de fer per aconseguir que la primera xifra, 7, estigui en la part entera.
0,356 $= 3{,}56 \cdot 10^{-1}$	1 salt hem hagut de fer per aconseguir que la primera xifra, 3, estigui en la part entera.
0,0691 $= 6{,}91 \cdot 10^{-2}$	2 salts hem hagut de fer per aconseguir que la primera xifra, 6, estigui en la part entera.

ACTIVITATS

1 Expressa en notació científica els nombres següents.

a) $2\,000\,000 = 2{,}000000 \cdot 10^{6} = 2 \cdot 10^{6}$

b) $4\,000 =$ ____________

c) $100 =$ ____________

d) $700 =$ ____________

e) $10 =$ ____________

f) $80\,000 =$ ____________

g) $5\,000\,000 = 5 \cdot$ ____________

2 Expressa en notació científica aquests nombres amb part entera i part decimal.

a) $990{,}85 = 9{,}9085 \cdot 10^{2}$

b) $340 = 3{,}4 \cdot$ ____________

c) $655{,}1 = 6{,}551 \cdot$ ____________

d) $567\,765{,}22 =$ ____________

e) $15{,}35 =$ ____________

f) $340{,}05 = 3{,}4005 \cdot$ ____________

g) $37{,}986 = 3{,}7986 \cdot$ ____________

h) $4{,}4 =$ ____________

i) $3{,}45 =$ ____________

3 Expressa els nombres decimals en notació científica.

a) $0{,}0567 = 5{,}67 \cdot 10^{-2}$

b) $0{,}000045 = 4{,}5 \cdot$ ____________

c) $0{,}0000061 =$ ____________

d) $0{,}093 =$ ____________

e) $0{,}367 = 3{,}67 \cdot$ ____________

f) $0{,}0073 =$ ____________

g) $0{,}000101 =$ ____________

h) $0{,}0007 =$ ____________

i) $0{,}4765 =$ ____________

FER OPERACIONS EN NOTACIÓ CIENTÍFICA

Nom: Curs: Data:

Per fer operacions amb nombres expressats en notació científica, cal seguir unes senzilles regles que veurem amb exemples. Per poder fer-ho després amb calculadora, és important aprendre a calcular primer sense, ja que funciona segons les mateixes regles.

EXEMPLE

1r cas: quan les potències de 10 estan elevades al **mateix exponent**, un nombre enter positiu o negatiu.

Efectua la suma $13,42 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^5$.

En aquest cas, les dues potències de 10 estan elevades al mateix exponent, 5, de manera que podem **treure factor comú**. El resultat es dóna en notació científica.

$$13,42 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^5 = (13,42 + 4) \cdot 10^5 = 17,42 \cdot 10^5 = 1,742 \cdot 10^6$$

ACTIVITATS

1 Fes aquestes sumes i restes en notació científica.

a) $6 \cdot 10^3 - 5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^3 = (\_\_ - \_\_ + \_\_) \cdot 10^3 = 8 \cdot 10^3$

b) $[101,17 \cdot 10^2 - 5,87 \cdot 10^2] \cdot 3 = [(\_\_\_ - \_\_\_) \cdot 10^2] \cdot 3 = [\_\_\_ \cdot 10^2] \cdot 3 = 2,859 \cdot 10^4$

c) $(33,3 \cdot 10 + 2,5 \cdot 10 - 6,7 \cdot 10) \cdot \dfrac{2}{7} = [(\_\_\_ + \_\_\_ - \_\_\_) \cdot 10] \cdot \dfrac{2}{7} = [\_\_\_ \cdot 10] \cdot \dfrac{2}{7} = 8,31 \cdot 10$

EXEMPLE

2n cas: quan les potències de 10 estan elevades a **diferents exponents enters positius**.

Fes la resta $6,74 \cdot 10^5 - 2,85 \cdot 10^3$.

Observa que, en aquest cas, les dues potències de 10 estan elevades a nombres diferents, 5 i 3, de manera que no podem treure factor comú directament. Cal expressar els dos nombres en funció de la **potència de menys valor**, en aquest cas 3.

$$2,85 \cdot 10^3$$
$$6,74 \cdot 10^5 = 6,74 \cdot 10^2 \cdot 10^3 = 674 \cdot 10^3$$
$$6,74 \cdot 10^5 - 2,85 \cdot 10^3 = 674 \cdot 10^3 - 2,85 \cdot 10^3 = (674 - 2,85) \cdot 10^3 = 671,15 \cdot 10^3$$

Un cop feta l'operació, convertim el resultat en notació científica:

$$671,15 \cdot 10^3 = 6,7115 \cdot 10^5$$

2 Fes aquestes sumes i restes en notació científica.

a) $2,71 \cdot 10^3 - 1,9 \cdot 10^2 + 5,43 \cdot 10^4 = 2,71 \cdot 10 \cdot 10^2 - 1,9 \cdot 10^2 + 5,43 \cdot 10^2 \cdot 10^2 =$
$= \_\_\_ \cdot 10^2 - \_\_\_ \cdot 10^2 + \_\_\_ \cdot 10^2 = (\_\_\_ \cdot 10^2) = 568,2 \cdot 10^4$

b) $3,76 \cdot 10^4 - 5,78 \cdot 10^3 = 3,76 \cdot 10 \cdot 10^3 - 5,78 \cdot 10^3 = \_\_\_ \cdot 10^3 - \_\_\_ \cdot 10^3 =$
$= (\_\_\_ - \_\_\_) \cdot \_\_\_ = 31,82 \cdot 10^3 = 3,182 \cdot 10^4$

c) $5,25 \cdot 10^4 + 60,4 \cdot 10^3 = \_\_\_ \cdot 10 \cdot 10^3 + \_\_\_ \cdot 10^3 = 1,129 \cdot 10^5$

FER OPERACIONS EN NOTACIÓ CIENTÍFICA

Nom: Curs: Data:

EXEMPLE

3r cas: quan les potències de 10 estan elevades a **exponents diferents**, amb nombres enters negatius.

Fes la suma $2{,}5 \cdot 10^{-5} + 9{,}6 \cdot 10^{-4}$.

En aquest cas, les dues potències de 10 estan elevades a diferents nombres enters negatius, -5 i -4, de manera que per treure factor comú triem el més gran, -4, i procedim així:

$2{,}5 \cdot 10^{-5} = 2{,}5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-4}$

$9{,}6 \cdot 10^{-4}$

$2{,}5 \cdot 10^{-5} + 9{,}6 \cdot 10^{-4} = 2{,}5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-4} + 9{,}6 \cdot 10^{-4} = 0{,}25 \cdot 10^{-4} + 9{,}6 \cdot 10^{-4} =$
$= (0{,}25 + 9{,}6) \cdot 10^{-4} = 9{,}85 \cdot 10^{-4}$

3 Fes aquestes sumes i restes en notació científica.

a) $2{,}32 \cdot 10^{-3} - 3{,}76 \cdot 10^{-4}$
Com que $10^{-4} = 10^{-1} \cdot 10^{-3}$, resulta que:
$2{,}32 \cdot 10^{-3} - 3{,}76 \cdot 10^{-4} = 2{,}32 \cdot 10^{-3} - 3{,}76 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-3} = (2{,}32 - 0{,}376) \cdot 10^{-3} = 1{,}944 \cdot 10^{-3}$

b) $7{,}9 \cdot 10^{-6} + 5{,}5 \cdot 10^{-5} =$ ___ · ___ · ___ + ___ · ___ = ___ · ___ + ___ · ___ =
$=$ (____ + ____) $\cdot 10^{-5} = 6{,}29 \cdot 10^{-5}$

c) $3 \cdot 10^{-6} - 2 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-4} - 8 \cdot 10^{-5} = 3 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-3} - 8 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-3} =$
$=$ (___ $- 2 +$ ___ $-$ ___) $\cdot 10^{-3} = -1{,}677 \cdot 10^{-3}$

EXEMPLE

Fes el producte $(6{,}2 \cdot 10^5) \cdot (4 \cdot 10^3)$.

Multipliquem els nombres: $6{,}2 \cdot 4 = 24{,}8$, i per un altre costat multipliquem les potències: $10^5 \cdot 10^3 = 10^8$

$(6{,}2 \cdot 10^5) \cdot (4 \cdot 10^3) = 24{,}8 \cdot 10^8 = 2{,}48 \cdot 10^9$

Fes la divisió $(6{,}2 \cdot 10^5) : (4 \cdot 10^3)$.

Dividim els nombres: $6{,}2 : 4 = 1{,}55$, i per un altre costat dividim les potències: $10^5 : 10^3 = 10^2$

$(6{,}2 \cdot 10^5) : (4 \cdot 10^3) = 1{,}55 \cdot 10^2$

4 Fes els productes i quocients en notació científica.

a) $(5 \cdot 10^4) \cdot (12 \cdot 10^7) = (5 \cdot 12) \cdot 10^{4+7} = 60 \cdot 10^{11} = 6 \cdot 10^{12}$

b) $(34{,}4 \cdot 10^{-5}) \cdot (6{,}1 \cdot 10^4) =$ (___ · ___) · 10___ $= 209{,}84 \cdot 10^{-1} = 2{,}0984 \cdot 10$

c) $(60 \cdot 10^5) : (3 \cdot 10^6) = (60 : 3) \cdot$ 10___ $= 20 \cdot 10^{-1} = 2$

5 Efectua les operacions combinades en notació científica.

a) $[(3 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^5) : (5 \cdot 10^3)] - [(2 \cdot 10^{-4} - 5 \cdot 10^{-4}) \cdot 10^4] =$ (2 · 10___) $- (-3 \cdot 10^0) =$
$= 200 + 3 = 203 = 2{,}03 \cdot 10^2$

b) $(6 \cdot 10^{-3}) : (8 \cdot 10^{-3} - 3 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-3}) = (6 \cdot 10^{-3}) :$ [(___ − ___ − ___) $\cdot 10^{-3}$] =
$= (6 \cdot 10^{-3}) :$ (___ $\cdot 10^{-3}) = 2 \cdot 10^0 = 2$

OPERAR AMB RADICALS

Nom: Curs: Data:

L'arrel *n*-èsima d'un nombre es pot posar en forma de potència:

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$\sqrt[n]{a}$ es diu **radical**, a és el **radicand** i n és l'**índex** de l'arrel.

És més fàcil operar amb potències que amb arrels, i per això transformem les arrels en potències.

EXEMPLE

$$\sqrt{\mathbf{5}} = 5^{1/2} \qquad \sqrt[7]{\mathbf{3^2}} = 3^{2/7}$$

ACTIVITATS

1 Escriu els radicals en forma de potències.

a) $\sqrt[5]{7^3} = \_\_\_\_^{3/5}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{8^5}} = \dfrac{1}{8^{5/2}} = 8^{\square}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \_\_\_\_$

MULTIPLICACIÓ (O DIVISIÓ) DE RADICALS

Per multiplicar o dividir radicals amb el **mateix radicand**, els convertim abans en potències.

EXEMPLE

$$\sqrt[3]{\mathbf{2}} \cdot \sqrt[5]{\mathbf{2}} = 2^{1/3} \cdot 2^{1/5} = 2^{1/3+1/5} = 2^{(5+3)/15} = 2^{8/15} = \sqrt[15]{2^8}$$

$$\sqrt[7]{\mathbf{3^5}} : \sqrt[3]{\mathbf{3}} = 3^{5/7} : 3^{1/3} = 3^{5/7-1/3} = 3^{(15-7)/21} = 3^{8/21} = \sqrt[21]{3^8}$$

2 Calcula els següents productes de radicals.

a) $\sqrt[5]{7^3} \cdot \sqrt{7^3} = 7^{3/5} \cdot 7^{3/2} = 7^{3/5+3/2} = 7^{(\_\_+\_\_)/\_\_} = 7^{21/10} = \sqrt[10]{7^{21}}$

b) $\sqrt[7]{6^2} + 6 = 6^{\_\_} \cdot 6 = 6^{\_\_+\_\_} = 6^{9/7} = \sqrt[7]{6^9}$

c) $\sqrt{3^3} \cdot \sqrt[5]{3^2} = 3^{\_\_} \cdot 3^{\_\_} = 3^{\_\_+\_\_} = 3^{19/10} = \sqrt[10]{3^{19}}$

d) $\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2^{3/4} \cdot 2^{2/3} \cdot 2^{1/2} = 2^{\_\_\_\_\_\_} = 2^{\_\_\_\_\_\_} = 2^{23/12} = \sqrt[12]{2^{23}}$

3 Calcula aquests quocients de radicals.

a) $\sqrt{2} : \sqrt[3]{2} = 2^{1/2} : 2^{1/3} = 2^{1/2-1/3} = 2^{(3-2)/6} = 2^{1/6} = \sqrt[6]{2}$

b) $\sqrt[3]{8^5} : \sqrt[3]{8^2} =$

c) $\sqrt[7]{5} : \sqrt[4]{5^3} =$

d) $(\sqrt[3]{3^7} \cdot \sqrt[3]{3^4}) : \sqrt{3^2} = (3^{\_\_} \cdot 3^{\_\_}) : 3 = 3^{\_\_} : 3 = 3^{8/3} = \sqrt[3]{3^8}$

OPERAR AMB RADICALS

Nom: Curs: Data:

RACIONALITZAR DENOMINADORS

Racionalitzar un denominador és el procés mitjançant el qual fem desaparèixer el radical del denominador de la fracció.

Aquest procés consisteix a multiplicar el numerador i el denominador per una expressió adequada que faci que en el denominador s'elimini l'arrel.

EXEMPLE

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\sqrt{2}}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\sqrt[5]{3^2}}} = \frac{1 \cdot \sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2} \cdot \sqrt[5]{3^3}} = \frac{\sqrt[5]{3^3}}{3}$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3 - \sqrt{2}}} = \frac{1 \cdot (3 + \sqrt{2})}{(3 - \sqrt{2}) \cdot (3 + \sqrt{2})} = \frac{3 + \sqrt{2}}{7}$$

En aquest cas, utilitzem la propietat per la qual una suma per una diferència de dos nombres és igual a una diferència de quadrats:

$$(3 - \sqrt{2}) \cdot (3 + \sqrt{2}) = 3^2 - (\sqrt{2})^2 = 9 - 2 = 7$$

4 Racionalitza els denominadors de les fraccions.

a) $\frac{1}{\sqrt{3}} =$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} =$

c) $\frac{5}{2 + \sqrt{3}} = \frac{5 \cdot (2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3})} = \frac{}{} = 10 - 5\sqrt{3}$

d) $-\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = -\frac{1 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})} = -\frac{}{} = -\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{(1 + \sqrt{2}) \cdot ()}{(1 - \sqrt{2}) \cdot ()} = \frac{()^2}{} = -(1 + \sqrt{2})^2$

f) $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \frac{\square \cdot \square}{\square \cdot \square} = \frac{\sqrt{15}}{10}$

g) $\frac{2}{1 - \sqrt{3}} =$

CALCULAR LOGARITMES I UTILITZAR-NE LES PROPIETATS

Nom: Curs: Data:

Donats dos nombres reals positius a i b ($a \neq 1$), el **logaritme de b en base a** és l'exponent al qual s'ha d'elevar a perquè el resultat sigui b.

$$\log_a b = c \rightarrow a^c = b$$

Quan la base dels logaritmes és 10, els anomenem **logaritmes decimals** i la base no s'escriu: $\log_{10} b =$ **log** b

Si la base és el nombre $e = 2{,}7182...$, els anomenem **logaritmes neperians**, i s'escriu: **ln** b

EXEMPLE

Aplica la definició de logaritme i calcula el valor de x.

a) $\log_5 \sqrt{5} = x$ — a) $5^x = \sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}} \rightarrow x = \frac{1}{2}$

b) $\log_x \frac{1}{64} = 6$ — b) $x^6 = \frac{1}{64} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

c) $\log_{\frac{1}{3}} 81 = x$ — c) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81 \rightarrow 3^{-x} = 3^4 \rightarrow x = -4$

ACTIVITATS

1 Calcula els logaritmes mitjançant la definició.

a) $\log_5 125$ b) $\log 1\,000$ c) $\log_2 64$ d) $\log_4 64$ e) $\ln e^4$

2 Calcula, aplicant-hi la definició, aquests logaritmes.

a) $\log 0{,}01$ b) $\log_3 \sqrt{27}$ c) $\log_{\frac{1}{4}} 64$ d) $\ln \frac{1}{e^6}$ e) $\log_2 \frac{2}{\sqrt{2}}$

3 Calcula el valor de x en cada cas.

a) $\log_x 125 = 3$ b) $\log x = -4$ c) $\log_3 (x + 2) = 3$ d) $\log_x 81 = 729$

CALCULAR LOGARITMES I UTILITZAR-NE LES PROPIETATS

Nom: Curs: Data:

PROPIETATS DELS LOGARITMES

$\log_a 1 = 0$ $\log_a a = 1$

$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$ $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$

EXEMPLE

Resol aquestes operacions amb logaritmes.

a) $\ln e^6 = 6 \cdot \ln e = 6 \cdot 1 = 6$

b) $\log 0{,}01 - \log 10 = \log\left(\frac{0{,}01}{10}\right) = \log 0{,}001 = \log 10^{-3} = -3 \cdot \log 10 = -3 \cdot 1 = -3$

c) $\log_{25} 3\,125 = \log_{25} (25^2 \cdot 5) = \log_{25} 25 + \log_{25} 5 = 1 + \log_{25} \sqrt{25} = 1 + \log_{25} 25^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

4 Calcula, usant les propietats, els logaritmes següents.

a) $\log_4 1$

b) $\log_3 3$

c) $\log_4 2048$

d) $\log 1000 + \log 0{,}01$

e) $\ln e^7 - \ln e^5 + \ln e^8$

f) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$

CANVI DE BASE

Per treballar els logaritmes amb la calculadora, cal que siguin decimals o neperians.
Quan no és així, utilitzem el **canvi de base** per transformar-los.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

EXEMPLE

Calcula amb la calculadora.

a) $\log 453$ **b)** $\log_5 769$

a) 453 $\boxed{\log}$ $\boxed{=}$ 2,65609...

b) $\log_5 769 = \frac{\log 769}{\log 5} = \frac{2{,}8859\ldots}{0{,}6989\ldots} = 4{,}1288\ldots$

5 Converteix en logaritmes decimals i calcula'n el valor fent servir la calculadora.

a) $\log_2 3$ b) $\log_3 2$ c) $\log_6 35$

6 Transforma en logaritmes neperians aquests logaritmes i determina'n el valor utilitzant la calculadora.

a) $\log 15$ b) $\log_8 4$ c) $\log_4 127$

Nom: Curs: Data:

ACTIVITATS

1 Efectua i expressa el resultat com a potència.

a) $\left(\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{5}\right)^6$ b) $\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{3^2\sqrt{3}}$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{2^2}} \cdot \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$ d) $\sqrt[3]{8\sqrt[5]{81}}$

2 Introdueix factors en el radical, si és possible.

a) $a\sqrt{\dfrac{4a-1}{2a}}$ c) $\dfrac{2}{a}\sqrt{\dfrac{3a}{8}}$ e) $\dfrac{4ab}{c}\sqrt[4]{\dfrac{c^2b}{8a}}$

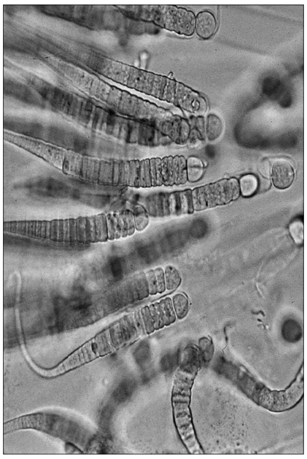
b) $\sqrt{2} \cdot 5$ d) $-a^2\sqrt[3]{a}$ f) $-2ab^2\sqrt[3]{ab}$

3 Racionalitza les expressions següents.

a) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{2}}$ b) $\dfrac{3}{\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[6]{3}}$

4 Racionalitza i opera.

a) $\dfrac{\sqrt{32}}{5} - \dfrac{3\sqrt{50}}{2} + \dfrac{5}{\sqrt{18}}$ b) $\dfrac{3\sqrt{8} + \sqrt{18} - 2\sqrt{72}}{4\sqrt{8} + \sqrt{2}}$ c) $\dfrac{-\sqrt{27} + \sqrt{48} + 5\sqrt{75}}{2\sqrt{75} - \sqrt{3}}$



5 S'ha observat que la població de certs bacteris es duplica cada hora.
Si el nombre inicial és de $8 \cdot 10^{12}$ bacteris:

a) Quants bacteris hi haurà al cap de 3 hores?
b) I al cap de 6 hores?
c) Quantes hores hauran de passar perquè siguin $1{,}024 \cdot 10^{15}$ bacteris?

6 Calcula $\log_3 24$ utilitzant les propietats dels logaritmes.

7 Desenvolupa les expressions següents.

a) $\log_3 \dfrac{a^2 \cdot b^5 \cdot c}{d^2}$ b) $\log_2 \dfrac{a^3 \cdot \sqrt[5]{b^6}}{\sqrt[3]{c^7}}$ c) $\log_{10} \dfrac{x \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{y^2 \cdot z^3}}$

1 Efectua i expressa el resultat com a potència.

a) $\left(\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt{5}\right)^6$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{2^2}}\cdot\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$

b) $\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[5]{3^2\sqrt{3}}$ d) $\sqrt[3]{8\sqrt[5]{81}}$

a) $\left(\sqrt[6]{5^2}\cdot\sqrt[6]{5^3}\right)^6 = 5^5$ c) $\sqrt[6]{2^2}\cdot\sqrt[8]{2} = \sqrt[24]{2^{8+3}} = 2^{\frac{11}{24}}$

b) $\sqrt[10]{3^2}\cdot\sqrt[10]{3^5} = 3^{\frac{7}{10}}$ d) $2\sqrt[15]{3^4} = 2\cdot 3^{\frac{4}{15}}$

2 Introdueix factors en el radical, si és possible.

a) $a\sqrt{\dfrac{4a-1}{2a}}$ c) $\dfrac{2}{a}\sqrt{\dfrac{3a}{8}}$ e) $\dfrac{4ab}{c}\sqrt[4]{\dfrac{c^2b}{8a}}$

b) $\sqrt{2}\cdot 5$ d) $-a^2\sqrt[3]{a}$ f) $-2ab^2\sqrt[3]{ab}$

a) $\sqrt{\dfrac{4a^2-a}{2}}$ c) $\sqrt{\dfrac{3}{2a}}$ e) $\sqrt[4]{\dfrac{32a^3b^5}{c^2}}$

b) $\sqrt{50}$ d) $-\sqrt[3]{a^7}$ f) $-\sqrt[3]{8a^4b^7}$

3 Racionalitza les expressions següents.

a) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{3}{\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[6]{3}}$

a) $$\frac{4}{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt[6]{3^2}\cdot\sqrt[6]{2^3}} = \frac{4}{\sqrt[6]{3^2\cdot 2^3}} =$$
$$= \frac{4\sqrt[6]{(3^2\cdot 2^3)^5}}{\sqrt[6]{3^2\cdot 2^3}\cdot\sqrt[6]{(3^2\cdot 2^3)^5}} = \frac{4\sqrt[6]{(3^2\cdot 2^3)^5}}{3^2\cdot 2^3} =$$
$$= \frac{\sqrt[6]{3^{10}\cdot 2^{15}}}{3^2\cdot 2} = \frac{2\sqrt[6]{3^4\cdot 2^3}}{3}$$

b) $$\frac{3}{\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[6]{3}} = \frac{3}{\sqrt[12]{5^3}\cdot\sqrt[12]{3^2}} = \frac{3}{\sqrt[12]{5^3\cdot 3^2}} =$$
$$= \frac{3\sqrt[12]{(5^3\cdot 3^2)^{11}}}{\sqrt[12]{5^3\cdot 3^2}\cdot\sqrt[12]{(5^3\cdot 3^2)^{11}}} = \frac{3\sqrt[12]{(5^3\cdot 3^2)^{11}}}{5^3\cdot 3^2} =$$
$$= \frac{\sqrt[12]{5^{33}\cdot 3^{22}}}{5^3\cdot 3} = \frac{\sqrt[12]{5^8\cdot 3^{10}}}{5} = \frac{\sqrt[6]{5^4\cdot 3^5}}{5}$$

4 Racionalitza i opera.

a) $\dfrac{\sqrt{32}}{5} - \dfrac{3\sqrt{50}}{2} + \dfrac{5}{\sqrt{18}}$ c) $\dfrac{-\sqrt{27}+\sqrt{48}+5\sqrt{75}}{2\sqrt{75}-\sqrt{3}}$

b) $\dfrac{3\sqrt{8}+\sqrt{18}-2\sqrt{72}}{4\sqrt{8}+\sqrt{2}}$

a) $$\frac{4\sqrt{2}}{5} - \frac{15\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{3\cdot 2} =$$
$$= \frac{24\sqrt{2} - 225\sqrt{2} + 25\sqrt{2}}{30} = \frac{-88\sqrt{2}}{15}$$

b) $$\frac{6\sqrt{2}+3\sqrt{2}-12\sqrt{2}}{8\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{-3\sqrt{2}}{9\sqrt{2}} = -\frac{1}{3}$$

c) $$\frac{-3\sqrt{3}+4\sqrt{3}+25\sqrt{3}}{10\sqrt{3}-\sqrt{3}} = \frac{26\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{26}{9}$$

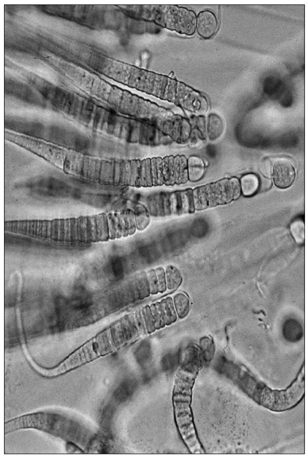
5 S'ha observat que la població de certs bacteris es duplica cada hora.

Si el nombre inicial és de $8\cdot 10^{12}$ bacteris:

a) Quants bacteris hi haurà al cap de 3 hores?

b) I al cap de 6 hores?

c) Quantes hores hauran de passar perquè siguin $1{,}024\cdot 10^{15}$ bacteris?



a) $8\cdot 10^{12}\cdot 2^3 = 6{,}4\cdot 10^{13}$ bacteris

b) $8\cdot 10^{12}\cdot 2^6 = 5{,}12\cdot 10^{14}$ bacteris

c) $1{,}024\cdot 10^{15} : 8\cdot 10^{12} = 128$, de manera que $2^n = 128 \rightarrow n = 7$
Hauran de passar 7 hores.

6 Calcula $\log_3 24$ utilitzant les propietats dels logaritmes.

$$\log_3 24 = \log_3(2^3\cdot 3) = \log_3 2^3 + \log_3 3 =$$
$$= 3\log_3 2 + 1 = 3\cdot\frac{\log_2 2}{\log_2 3} + 1 =$$
$$= 3\cdot\frac{1}{1{,}5850} + 1 = 3\cdot 0{,}6309 + 1 = 2{,}8927$$

7 Desenvolupa les expressions següents.

a) $\log_3\dfrac{a^2\cdot b^5\cdot c}{d^2}$

b) $\log_2\dfrac{a^3\cdot\sqrt[5]{b^6}}{\sqrt[3]{c^7}}$

c) $\log_{10}\dfrac{x\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{y^2\cdot z^3}}$

a) $\log_3 a^2 + \log_3 b^5 + \log_3 c - \log_3 d^2 =$
$= 2\log_3 a + 5\log_3 b + \log_3 c - 2\log_3 d$

b) $\log_2 a^3 + \log_2\sqrt[5]{b^6} - \log_2\sqrt[3]{c^7} =$
$= 3\log_2 a + \dfrac{6}{5}\log_2 b - \dfrac{7}{3}\log_2 c$

c) $\log_{10} x + \log_{10}\sqrt{x} - \log_{10}\sqrt{y^2} - \log_{10}\sqrt{z^3} =$
$= \log_{10} x + \dfrac{1}{2}\log_{10} x - \log_{10} y - \dfrac{3}{2}\log_{10} z =$
$= \dfrac{3}{2}\log_{10} x - \log_{10} y - \dfrac{3}{2}\log_{10} z$

RECONÈIXER EL GRAU I ELS ELEMENTS QUE FORMEN UN POLINOMI

Nom: Curs: Data:

- Un **polinomi** és una expressió algebraica formada per la suma algebraica de monomis, que són els **termes** del polinomi.
- Un polinomi és **reduït** quan no té monomis semblants.
- El **grau** d'un polinomi reduït és el grau del terme de grau més alt.
- Un polinomi és **complet** quan té termes de tots els graus inferiors al grau del polinomi.

ACTIVITATS

1 Redueix el polinomi i ordena'l, de grau més alt a grau més baix.

$$P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 3 + 5 - 7x + 3x^2 - 2x^3$$

$P(x) =$ ______

- Té ______ termes.
- El terme independent és ______
- El grau del polinomi és ______
- Com és el polinomi, complet o incomplet? ______

2 Senyala si els polinomis següents són complets o incomplets. Completa la taula.

POLINOMI	COMPLET	INCOMPLET	FALTEN ELS TERMES
$P(x) = -4x^2 + 5x - 2$			
$Q(x) = 2x^3 + 40$			
$R(x) = -10x^2 - 20x + 40$			
$S(x) = 40$			
$T(x) = x^3 + x^2 + 1$			

3 Donat el polinomi $Q(x) = 2x^5 + x^2 - x$, indica:

a) Si el polinomi és ordenat.

b) Si el polinomi està reduït.

c) Si el polinomi és complet.

d) Quin grau té.

e) Quin és el terme independent.

DETERMINAR EL VALOR NUMÈRIC D'UN POLINOMI

Nom: Curs: Data:

El **valor numèric** d'un polinomi $P(x)$, per a un valor de la variable $x = a$, s'obté substituint la variable x per a i operant.

EXEMPLE

En un polinomi, per exemple $P(x) = 2x^2 + 1$, es pot introduir qualsevol valor a per substituir x:

Per a $x = 2$: $P(2) = 2 \cdot 2^2 + 1$
$P(2) = 2 \cdot 4 + 1$
$P(2) = 8 + 1$
$P(2) = 9$ El valor del polinomi quan introduïm el valor 2 és 9.

Per a $x = 10$: $P(10) = 2 \cdot 10^2 + 1$
$P(10) = 2 \cdot 100 + 1$
$P(10) = 200 + 1$
$P(10) = 201$ El valor del polinomi quan introduïm el valor 10 és 201.

ACTIVITATS

1 Calcula el valor numèric dels polinomis per a $x = 1$.

a) $P(x) = x + 1$
$x = 1$ $P(\ ) = \boxed{} + 1$

b) $P(x) = x^2 + 1$

c) $P(x) = x^3 + 1$

d) $P(x) = x^4 + 1$

2 Calcula el valor numèric de cada polinomi per al valor de la variable indicada.

a) $A(x) = x + 1$, per a $x = 1$

b) $B(x) = 4x^5 - 6x^2 + 3$, per a $x = -1$

c) $C(x) = -9x^4 + 7x^2 + 5$, per a $x = 1$

d) $D(x) = x^3 + x^2 + x + 2$, per a $x = -2$

FER OPERACIONS AMB POLINOMIS: SUMES I RESTES

Nom: Curs: Data:

- La **suma** de dos polinomis es calcula sumant els termes semblants dels dos.
- La **resta** de dos polinomis s'obté sumant el primer amb el polinomi oposat del segon.
- Recorda que la regla bàsica de les sumes i restes de polinomis és que **només es poden sumar i restar termes semblants**.

EXEMPLE

Suma els polinomis següents: $\boldsymbol{P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 3}$ **i** $\boldsymbol{Q(x) = 4x^2 - 3x + 2}$

Es pot fer de dues maneres:

- **En línia:** només se sumen els termes semblants.

$$P(x) + Q(x) = 3x^3 - \boxed{2x^2} + \boxed{5x} - \boxed{3} + \boxed{4x^2} - \boxed{3x} + \boxed{2} = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$$

$$\boldsymbol{P(x) + Q(x) = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1}$$

- **En columna:** s'han d'ordenar els polinomis.

$$\begin{array}{rrrrr} & P(x) = & 3x^3 - 2x^2 + 5x - 3 \\ + & Q(x) = & 4x^2 - 3x + 2 \\ \hline & \boldsymbol{P(x) + Q(x) =} & \boldsymbol{3x^3 + 2x^2 + 2x - 1} \end{array}$$

EXEMPLE

Resta els polinomis següents: $\boldsymbol{P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 5}$ **i** $\boldsymbol{Q(x) = 5x^2 - 2x + 7}$

Es pot fer de dues maneres:

- **En línia:** el signe negatiu davant del parèntesi afecta tots els termes.

$$P(x) - Q(x) = 3x^3 - \boxed{5x^2} + \boxed{5} - (\boxed{5x^2} - 2x + \boxed{7}) = 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2$$

$$\boldsymbol{P(x) - Q(x) = 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2}$$

- **En columna:** s'han d'ordenar els polinomis com s'indica

$$\begin{array}{rrl} & P(x) = & 3x^3 - 5x^2 \qquad + 5 \\ - & Q(x) = & \qquad - (5x^2 - 2x + 7) \\ \hline & \boldsymbol{P(x) - Q(x) =} & \boldsymbol{3x^3 - 10x^2 + 2x - 2} \end{array}$$

ACTIVITATS

1 Donats els polinomis $P(x) = x^3 - 2x + 1$ i $Q(x) = x^2 - 3x + 2$, calcula $P(x) + Q(x)$ i $P(x) - Q(x)$, resolent les operacions de les maneres estudiades: en línia i en columna.

FER OPERACIONS AMB POLINOMIS: SUMES I RESTES

Nom: Curs: Data:

ACTIVITATS

2 Calcula la suma i la resta d'aquests polinomis.

a) $P(x) = 3x + 2x^2 - x - 4$ $Q(x) = x^3 - x^2 - 9x + 3$

$P(x) =$
$+\ Q(x) =$

$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$
$-\ Q(x) =$

$P(x) - Q(x) =$

b) $P(x) = x^7 - 8x^4 + 3$ $Q(x) = x^5 + 3x^3 - 6$

$P(x) =$
$+\ Q(x) =$

$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$
$-\ Q(x) =$

$P(x) - Q(x) =$

c) $P(x) = 10x^4 + x^2 + 1$ $Q(x) = x^5 + 7x^2 - x$

$P(x) =$
$+\ Q(x) =$

$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$
$-\ Q(x) =$

$P(x) - Q(x) =$

d) $P(x) = -x^4 - x^3 - 2$ $Q(x) = -3x^4 - 2x^3 - x - 5$

$P(x) =$
$+\ Q(x) =$

$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$
$-\ Q(x) =$

$P(x) - Q(x) =$

e) $P(x) = -3x^3 - 2x^2 - 2$ $Q(x) = 6x^4 - x^3 - 3x + 7$

$P(x) =$
$+\ Q(x) =$

$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$
$-\ Q(x) =$

$P(x) - Q(x) =$

FER OPERACIONS AMB POLINOMIS: MULTIPLICACIÓ

Nom: Curs: Data:

- El **producte** de dos polinomis es calcula **multiplicant cada un dels monomis d'un d'ells per tots els monomis de l'altre i sumant** (o restant) els polinomis obtinguts en aquestes multiplicacions.
- Per multiplicar dos polinomis cal aplicar la **propietat distributiva**.

EXEMPLE

Multiplica els polinomis següents: $P(x) = 7x^3 + 2x^2 + x - 7$ i $Q(x) = x^2 + 3$

Resoldrem l'exercici multiplicant en línia:

$$P(x) \cdot Q(x) = (7x^3 + 2x^2 + x - 7) \cdot (x^2 + 3) =$$

Es multipliquen tots els monomis d'un polinomi per tots els monomis de l'altre polinomi.

$$= \boxed{7x^3 \cdot x^2 + 7x^3 \cdot 3} + \boxed{2x^2 \cdot x^2 + 2x^2 \cdot 3} + \boxed{x \cdot x^2 + x \cdot 3} - \boxed{7 \cdot x^2 + 7 \cdot 3}$$

$$= 7x^5 + 21x^3 + 2x^4 + 6x^2 + x^3 + 3x - 7x^2 - 21$$

$$= 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21$$

Només se sumen termes semblants.

$$\boldsymbol{P(x) \cdot Q(x) = 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21}$$

ACTIVITATS

1 Multiplica els polinomis següents.

a) $P(x) = 5x^2 - 7x + 3$ i $Q(x) = 2x^2 + 1$

$$P(x) \cdot Q(x) = (5x^2 - 7x + 3) \cdot (2x^2 + 1)$$

Multiplica els monomis.

$$= \boxed{} - \boxed{} + \boxed{} = \boxed{} - \boxed{} + \boxed{} =$$

$=$

Suma els termes.

b) $P(x) = x^3 - 1$ i $Q(x) = 5x^2 - x + 2$

$P(x) \cdot Q(x) =$

FER OPERACIONS AMB POLINOMIS: MULTIPLICACIÓ

Nom: Curs: Data:

EXEMPLE

Multiplica els polinomis següents: $P(x) = 7x^3 + 2x^2 + x - 7$ i $Q(x) = x^2 + 3$

Resoldrem l'exercici multiplicant en columna:

$$\begin{array}{lr}
P(x) = & 7x^3 + 2x^2 + x - 7 \\
\times\ Q(x) = & x^2 + 3 \\
\hline
 & 21x^3 + 6x^2 + 3x - 21 \\
+ & 7x^5 + 2x^4 + x^3 - 7x^2 \quad \\
\hline
 & \mathbf{P(x) \cdot Q(x) = 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21}
\end{array}$$

← *Producte de 3 per $7x^3$, $2x^2$, x, 7.*

← *Producte de x^2 per $7x^3$, $2x^2$, x, 7.*

← *Suma de monomis semblants.*

2 Multiplica els polinomis següents: $P(x) = 5x^2 - 3x + 4$ i $Q(x) = 3x + 2$

$$\begin{array}{lr}
P(x) = & 5x^2 - 3x + 4 \\
\times\ Q(x) = & 3x + 2 \\
\hline
 & \\
+ & \\
\hline
\end{array}$$

← *Producte de 2 per $5x^2$, $3x$, 4.*

← *Producte de $3x$ per $5x^2$, $3x$, 4.*

$\boxed{\mathbf{P(x) \cdot Q(x) =}}$ ← *Suma de monomis semblants.*

3 Calcula el producte dels polinomis $R(x) = x^3 - 1$ i $S(x) = x + 3$, utilitzant la propietat distributiva.

4 Calcula el producte dels polinomis següents.

a) $R(x) = x^3 - 1$ i $S(x) = x$

b) $R(x) = x^4 - x + 1$ i $S(x) = x^2 + 1$

FER OPERACIONS AMB POLINOMIS: DIVISIÓ

Nom: Curs: Data:

- Per dividir dos polinomis, $P(x)$ i $Q(x)$, cal tenir en compte que el grau del polinomi $P(x)$ ha de ser més alt o igual que el grau del polinomi $Q(x)$.
- Donats dos polinomis $P(x)$ i $Q(x)$, hi ha altres dos polinomis $C(x)$ i $R(x)$ que compleixen que:

$$\boldsymbol{P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)}$$

$P(x)$ és el polinomi **dividend**.

$Q(x)$ és el polinomi **divisor**.

$C(x)$ és el polinomi **quocient**.

$R(x)$ és el polinomi **residu**.

- Si el residu de la divisió és nul, és a dir, si $R(x) = 0$:

La **divisió** és **exacta**.

El polinomi **$P(x)$ és divisible per $Q(x)$**.

- En cas contrari, diem que la **divisió** és **entera**.

EXEMPLE

Divideix els polinomis següents: $P(x) = 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7$ i $Q(x) = x^2 + 5$

$$\begin{array}{l|l} 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7 & x^2 + 5 \\ \hline & \bigcirc \end{array}$$

Hem d'elegir un monomi que multiplicat per x^2 ens doni $5x^3$:

$\bigcirc \cdot x^2 = 5x^3$. En aquest cas, $\bigcirc = 5x$.

$$\begin{array}{l|l} \cancel{5x^3} + 3x^2 + 5x - 7 & x^2 + 5 \\ \cline{2-2} \cancel{-5x^3} & 5x + 3 \\ \qquad\qquad - 25x & \\ \hline \qquad 3x^2 - 20x - 7 & \end{array}$$

Multipliquem $5x$ per cada un dels termes del polinomi quocient (x^2, 5), canviem de signe els resultats i els col·loquem en la columna corresponent. A continuació, fem la suma.

Hem de buscar un monomi que multiplicat per x^2 ens doni $3x^2$, en aquest cas 3.

$$\begin{array}{l|l} \cancel{5x^3} + 3x^2 + 5x - 7 & x^2 + 5 \\ \cline{2-2} \cancel{-5x^3} & 5x + 3 \\ \qquad\qquad - 25x & \\ \hline \qquad \cancel{3x^2} - 20x - 7 & \\ \qquad \cancel{-3x^2} \qquad\quad - 15 & \\ \hline \qquad\qquad - 20x - 22 & \end{array}$$

Multipliquem 3 per cada un dels termes del polinomi quocient (x^2, 5), canviem de signe els resultats i els col·loquem a la columna corresponent. A continuació, fem la suma.

Hem de buscar un monomi que multiplicat per x^2 ens doni $20x$, però no n'hi ha cap. Per tant, la divisió s'acaba.

Polinomi dividend: $P(x) = 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7$

Polinomi divisor: $Q(x) = x^2 + 5$

Polinomi quocient: $C(x) = 5x + 3$

Polinomi residu: $R(x) = -20x - 22$

En aquest cas, la divisió és entera, ja que el residu obtingut és diferent de zero.

FER OPERACIONS AMB POLINOMIS: DIVISIÓ

Nom: Curs: Data:

ACTIVITATS

1 Calcula les divisions de polinomis i indica si són exactes o enteres.

a) $P(x) = x - 1, Q(x) = x$

c) $P(x) = x^2 - 1, Q(x) = x + 1$

b) $P(x) = x^2 - 5x + 6, Q(x) = x - 2$

d) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x, Q(x) = x$

2 Efectua aquestes divisions i comprova que $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$.

a) $P(x) = x^3 - 1, Q(x) = x$

c) $P(x) = x^3 - 1, Q(x) = x^2 - 2$

b) $P(x) = x^3 - 1, Q(x) = x + 1$

d) $P(x) = x^3 + 1, Q(x) = x^3$

IDENTIFICAR I DESENVOLUPAR IGUALTATS NOTABLES

Nom: Curs: Data:

QUADRAT D'UNA SUMA

- El quadrat d'una suma és igual al quadrat del primer terme, més el doble del producte del primer pel segon, més el quadrat del segon:

$$\boldsymbol{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

- Veiem que això es pot fer com una multiplicació normal:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + \overbrace{ab + ab} + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

EXEMPLE

$\boldsymbol{(x + 3)^2} = (x + 3) \cdot (x + 3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$

$\boldsymbol{(4x + y)} = (4x + y) \cdot (4x + y) = 16x^2 + 4xy + 4xy + y^2 = 16x^2 + 8xy + y^2$

ACTIVITATS

1 Desenvolupa les igualtats següents.

a) $(x + 2y)^2 = (x + 2y) \cdot (x + 2y) =$

b) $(3x^3 + 3)^2 =$

c) $(2x + 3y)^2 =$

QUADRAT D'UNA DIFERÈNCIA

- El quadrat d'una diferència és igual al quadrat del primer terme, menys el doble del producte del primer pel segon, més el quadrat del segon:

$$\boldsymbol{(a - b)^2 = a^2 - 2ab - b^2}$$

- Veiem que això es pot fer com una multiplicació normal:

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - \overbrace{ab - ab} - b^2 = a^2 - 2ab - b^2$$

EXEMPLE

$\boldsymbol{(2y - 3)^2} = (2y - 3) \cdot (2y - 3) = 4y^2 - 6y - 6y + 9 = 4y^2 - 12y + 9$

$\boldsymbol{(x^2 - 2)} = (x^2 - 2) \cdot (x^2 - 2) = x^4 - 2x^2 - 2x^2 + 4 = x^4 - 4x^2 + 4$

2 Desenvolupa les igualtats.

a) $(6x - 4y)^2 = (6x - 4y) \cdot (6x - 4y) =$

b) $(5x^4 - 2)^2 =$

c) $(4x^3 - a^2)^2 =$

IDENTIFICAR I DESENVOLUPAR IGUALTATS NOTABLES

Nom: Curs: Data:

PRODUCTE D'UNA SUMA PER UNA DIFERÈNCIA

- El producte d'una suma per una diferència és igual al quadrat del primer menys el quadrat del segon:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

- Veiem que això es pot fer com una multiplicació normal:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ab} + b^2 = a^2 - b^2$$

EXEMPLE

$\mathbf{(3x + 2) \cdot (3x - 2)} = 9x^2 - 6x + 6x - 4 = 9x^2 - 4$

$\mathbf{(5x - 3y) \cdot (5x + 3y)} = 25x^2 + 15xy - 15xy - 9y^2 = 25x^2 - 9y^2$

ACTIVITATS

3 Desenvolupa els productes següents.

a) $(7x + x^4) \cdot (7x - x^4) =$

b) $(y + x^2) \cdot (y - x^2) =$

c) $(x + x^3) \cdot (x - x^3) =$

d) $(a^4 - b) \cdot (a^4 + b) =$

4 Desenvolupa els productes.

a) $(x + 5)^2 =$

b) $(2y - 7)^2 =$

c) $(3xy + 2yz) \cdot (3xy - 2yz) =$

d) $(abc + 1)^2 =$

e) $(7 - 3x)^2 =$

f) $(9v + 2z) \cdot (9v - 2z) =$

g) $(3xy + x^3)^2 =$

5 Desenvolupa.

a) $(4x + 2)^2 - (5x + 1) \cdot (2x - 3) =$

b) $(x + 3)^2 - (x - 2)^2 =$

Nom: Curs: Data:

ACTIVITATS

1 Determina el valor de m perquè les divisions tinguin el residu indicat.

a) $(x^5 + 6x^3 + mx + 17) : (+ 1) \rightarrow$ Residu 2

b) $(2mx^3 - 3mx^2 + 8m) : (- 2) \longrightarrow$ Residu -4

2 La torre d'una església és un prisma de base quadrada i té una alçada 15 m més gran que l'aresta de la base.

a) Expressa, en llenguatge algebraic, la mesura de la superfície lateral i el volum.

b) Calcula els valors numèrics de la superfície i del volum per a una aresta de la base de 5, 6 i 7 m, respectivament.

3 La pàgina d'un llibre té el doble d'alt que d'ample, els marges laterals tenen 2 cm, i els marges superior i inferior, 3 cm.

a) Expressa la superfície total de la pàgina en llenguatge algebraic.

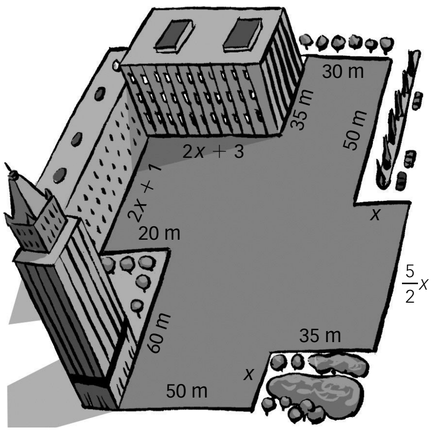
b) Fes el mateix amb la superfície útil de paper (el que queda dins dels marges).

4 El diàmetre de la base d'una sitja cilíndrica té $\frac{3}{4}$ de la longitud de l'alçada.

a) Expressa la capacitat de la sitja en funció del diàmetre de la base.

b) Volem pintar la sitja i utilitzem 1 kg de pintura per cada metre quadrat. Calcula quants quilograms de pintura necessitem si el diàmetre de la base fa 2 m.

5 Calcula el perímetre i l'àrea de la figura, i expressa els resultats amb polinomis.



1 Determina el valor de m perquè les divisions tinguin el residu indicat.

a) $(x^5 + 6x^3 + mx + 17) : (+ 1) \rightarrow$ Residu 2

b) $(2mx^3 - 3mx^2 + 8m) : (- 2) \longrightarrow$ Residu -4

a)
$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & 6 & 0 & m & 17 \\ -1 & & -1 & 1 & -7 & 7 & -m-7 \\ \hline & 1 & -1 & 7 & -7 & m+7 & \boxed{-m+10} \end{array} \rightarrow$$

$\rightarrow\ -m + 10 = 2 \rightarrow m = 8$

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 2m & -3m & 0 & 8m \\ 2 & & 4m & 2m & 4m \\ \hline & 2m & m & 2m & \boxed{12m} \end{array} \rightarrow$$

$\rightarrow\ 12m = -4 \rightarrow m = -\dfrac{1}{3}$

2 La torre d'una església és un prisma de base quadrada i té una alçada 15 m més gran que l'aresta de la base.

a) Expressa, en llenguatge algebraic, la mesura de la superfície lateral i el volum.

b) Calcula els valors numèrics de la superfície i del volum per a una aresta de la base de 5, 6 i 7 m, respectivament.

a) Aresta: x

Alçada: $x + 15$

$A_{\text{lateral}} = 4x \cdot (+ 15) = 4x^2 + 60x$

$V = x^2 \cdot (+ 15) = x^3 + 15x^2$

b)

	$x = 5$ m	$x = 6$ m	$x = 7$ m
$A_{\text{lateral}} = 4x^2 + 60x$	400 m^2	504 m^2	616 m^2
$V = x^3 + 15x^2$	500 m^3	756 m^3	1078 m^3

3 La pàgina d'un llibre té el doble d'alt que d'ample, els marges laterals tenen 2 cm, i els marges superior i inferior, 3 cm.

a) Expressa la superfície total de la pàgina en llenguatge algebraic.

b) Fes el mateix amb la superfície útil de paper (el que queda dins dels marges).

a) Ample: x

Alt: $2x$

$A = x \cdot 2x = 2x^2$

b) Ample: $x - 4$

Alt: $2x - 6$

$A = (x - 4) \cdot (2x - 6) = 2x^2 - 14x + 24$

4 El diàmetre de la base d'una sitja cilíndrica té $\dfrac{3}{4}$ de la longitud de l'alçada.

a) Expressa la capacitat de la sitja en funció del diàmetre de la base.

b) Volem pintar la sitja i utilitzem 1 kg de pintura per cada metre quadrat. Calcula quants quilograms de pintura necessitem si el diàmetre de la base fa 2 m.

a) Diàmetre: x

Alçada: $\dfrac{4}{3}x$ $\qquad V = \pi \cdot \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \cdot \dfrac{4}{3}x = \pi \cdot \dfrac{x^3}{3}$

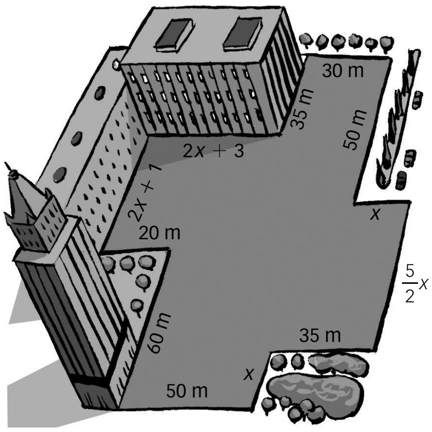
b) Diàmetre: x

Alçada: $\dfrac{4}{3}x$ $\qquad A_{\text{lateral}} = \pi \cdot x \cdot \dfrac{4}{3}x = \pi \cdot \dfrac{4x^2}{3} \xrightarrow{x\,=\,2}$

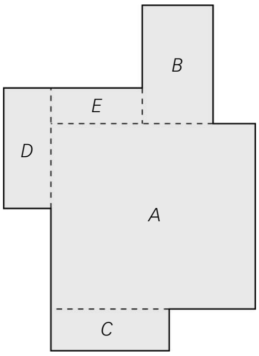
$A_{\text{lateral}} = \pi \cdot \dfrac{4 \cdot 2^2}{3} = 16{,}75$ m^2

Necessitem 16,75 kg de pintura.

5 Calcula el perímetre i l'àrea de la figura, i expressa els resultats amb polinomis.



$$\text{Perímetre} = 50 + x + 35 + \frac{5}{2}x + x + 50 + 30 + $$
$$+ 35 + 2x + 3 + 2x + 1 + 20 + 60 = \left(284 + \frac{17}{2}x\right) \text{ m}$$



$A_A = \dfrac{5}{2}x \cdot (50 + 35) = \dfrac{425}{2}x$ m^2

$A_B = 30 \cdot 50 = 1500$ m^2

$A_C = 50 \cdot x = 50x$ m^2

$A_D = 20 \cdot (2x + 1) = (40x + 20)$ m^2

$A_E = (2x + 3 - 20) \cdot (50 - 35) =$
$= (30x - 255)$ m^2

$$A = A_A + A_B + A_C + A_D + A_E = \frac{425}{2}x + 1500 +$$
$$+ 50x + 40x + 20 + 30x - 255 = \frac{665}{2}x + 1265 \text{ m}^2$$

RESOLDRE EQUACIONS DE PRIMER GRAU

Nom: Curs: Data:

Resoldre una equació és calcular el valor de la incògnita que compleix l'equació.

Per resoldre una equació de primer grau, **transposem termes**, que consisteix a passar a un membre (normalment, l'esquerre) tots els termes amb x, i a l'altre membre (el dret), tots els nombres o termes independents (termes sense x).

S'hauran de tenir en compte les regles següents.

- **Regla de la suma:** un terme que està **sumant** en un membre de l'equació passa a l'altre membre **restant**, i si està **restant** passa **sumant**.
- **Regla del producte:** un terme que està **multiplicant** en un membre de l'equació passa a l'altre membre **dividint**, i si està **dividint** passa **multiplicant**.

EXEMPLE

Resol aquesta equació de primer grau per transposició: $5x - 3 = 3x + 11$

- Sumem 3 en els dos membres:

$$5x - 3 + 3 = 3x + 11 + 3 \rightarrow 5x = 3x + 14$$

- Per eliminar el terme amb x del segon membre, restem $3x$ en els dos membres:

$$5x - 3x = 3x + 14 - 3x \rightarrow 2x = 14$$

- Per aïllar la incògnita x, dividim els dos membres de l'equació entre 2:

$$\frac{2x}{2} = \frac{14}{2} \rightarrow x = 7$$

ACTIVITATS

1 Resol per transposició les següents equacions de primer grau.

a) $7x - 1 = 9 - 3x$

d) $75 - 37x + 25 - 12x = 318 + x - 10 + 2x$

b) $5 - 3x = 1 - x + 9 - 3x$

e) $4x - 18 + x - 7 = 25 - 5x$

c) $x - 10 = 3x - 7 + 8x - 13$

f) $5x - 30 + 35 - 10x = 45x - 20 + 65 - 10x$

RESOLDRE EQUACIONS DE PRIMER GRAU AMB PARÈNTESIS I DENOMINADORS

Nom: Curs: Data:

EQUACIONS DE PRIMER GRAU AMB PARÈNTESIS

Per resoldre una equació de primer grau que conté parèntesis, en primer lloc hem de treure'ls, parant atenció en els canvis de signe quan hi hagi un signe negatiu davant del parèntesi.

EXEMPLE

Resol la següent equació de primer grau: $(2 + x) - 5(x - 1) = 3(x + 1) + (x - 4)$

- Traiem els parèntesis: $2 + x - 5x + 5 = 3x + 3 + x - 4$
- Reduïm termes semblants: $-4x + 7 = 4x - 1$
- Transposem termes: $-4x - 4x = -1 - 7 \rightarrow -8x = -8$
- Aïllem la x: $x = \frac{-8}{-8} = 1$
- Comprovem la solució:

$$(2 + x) - 5(x - 1) = 3(x + 1) + (x - 4)$$
$$(2 + 1) - 5(1 - 1) = 3(1 + 1) + (1 - 4)$$
$$3 - 0 = 3 \cdot 2 - 3 \rightarrow 3 = 6 - 3 = 3 \rightarrow 3 = 3$$

La solució és correcta, perquè el resultat final de les operacions és el mateix nombre en els dos membres de l'equació.

ACTIVITATS

1 Resol les equacions de primer grau i comprova la solució.

a) $(3 - x) + 2(x - 1) = (x - 5) + 2x$

d) $7x - (5 - x) = 4 - (x + 3)$

b) $(7 - 6x) - 5(x + 2) = 3(x + 2) - 2x$

e) $2(x - 5) - 3(1 - x) = 17$

c) $2(5 - x) = 19 - 3(x + 5)$

f) $6(12x - 81) = 80x + 2$

RESOLDRE EQUACIONS DE PRIMER GRAU AMB PARÈNTESIS I DENOMINADORS

Nom: Curs: Data:

EQUACIONS DE PRIMER GRAU AMB DENOMINADORS

Per eliminar els denominadors, hem de calcular el mínim comú múltiple (m.c.m.) i multiplicar els dos membres de l'equació per aquest valor.

EXEMPLE

Resol la següent equació de primer grau: $\dfrac{x-5}{3}-2=\dfrac{x+1}{2}+1$

- Calculem el m.c.m. $(2, 3) = 6$
- Multipliquem els dos membres de l'equació per 6:

$$\frac{6(x-5)}{3}-6\cdot 2=\frac{6(x+1)}{2}+6\cdot 1 \qquad 2(x-5)-12=3(x+1)+6$$

- Traiem els parèntesis: $2x-10-12=3x+3+6$
- Reduïm termes semblants: $2x-22=3x+9$
- Transposem termes: $2x-3x=9+22 \rightarrow -x=31 \rightarrow x=-31$
- Comprovem la solució: $\dfrac{x-5}{3}-2=\dfrac{x+1}{2}+1 \rightarrow \dfrac{-31-5}{3}-2=\dfrac{-31+1}{2}+1$

$$\frac{-36}{3}-2=\frac{-30}{2}+1 \rightarrow -12-2=-15+1 \rightarrow -14=-14$$

2 Resol les equacions següents i comprova les solucions.

a) $\dfrac{3x-1}{5}=\dfrac{2x+1}{3}$

b) $\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{x}{2}-\dfrac{x+4}{30}$

c) $\dfrac{x}{3}+1=\dfrac{x+2}{5}-\dfrac{x-3}{2}+\dfrac{2x}{6}$

RESOLDRE EQUACIONS DE PRIMER GRAU AMB PARÈNTESIS I DENOMINADORS

Nom: Curs: Data:

3 Resol les següents equacions de primer grau amb parèntesis i denominadors, i comprova'n el resultat.

a) $2\left(x-\frac{1}{2}\right)+3\left(x-\frac{3}{2}\right)=2\left(x+\frac{1}{2}\right)-\left(x-\frac{3}{2}\right)$

b) $\left(x+\frac{1}{5}\right)-\left(2x-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{5}\left(\frac{7}{2}x+1\right)$

c) $\frac{2x+1}{3}-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{x-1}{6}-\frac{x}{4}$

d) $\frac{3x-1}{2}+2\left(1-\frac{x}{2}\right)=3\left(\frac{x-2}{5}\right)+3$

IDENTIFICAR I RESOLDRE EQUACIONS DE SEGON GRAU

Nom: Curs: Data:

Una equació de segon grau amb una incògnita és una equació que s'expressa de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

on a, b i c són nombres reals i $a \neq 0$. Si els coeficients b i c són diferents de zero, diem que l'equació és **completa**; en cas contrari, és **incompleta**.

EXEMPLE

L'equació $3x^2 - 4x + 1 = 0$ és una equació de segon grau completa, ja que $a = 3$, $b = -4$ i $c = 1$.

L'equació $3x^2 + 1 = 0$ és una equació de segon grau incompleta, perquè $a = 3$, $b = 0$ i $c = 1$.

L'equació $3x^2 = 0$ és una equació de segon grau incompleta, perquè $a = 3$, $b = 0$ i $c = 0$.

RESOLUCIÓ D'EQUACIONS DE SEGON GRAU INCOMPLETES

- Equacions del tipus $ax^2 + c = 0 \rightarrow ax^2 = -c \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$

  Depenent del valor que tingui c, l'equació tindrà una solució, dues o cap.

- Equacions del tipus $ax^2 + bx = 0 \rightarrow x\,(ax + b) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \rightarrow x = \dfrac{-b}{a} \end{cases}$

EXEMPLE

- L'equació $2x^2 - 16 = 0$ és incompleta, del tipus $ax^2 + c = 0$, en la qual $a = 2$ i $c = -16$.

  Operant-hi, tenim que: $2x^2 = 16 \rightarrow x^2 = 8 \rightarrow x = \pm\sqrt{8}$

  Per tant, té dues solucions: $x_1 = \sqrt{8}$ i $x_2 = -\sqrt{8}$

  Comprovem que són solucions de l'equació:

  Si $x = \sqrt{8} \rightarrow 2 \cdot (\sqrt{8})^2 = 2 \cdot 8 = 16$ Si $x = -\sqrt{8} \rightarrow 2 \cdot (-\sqrt{8})^2 = 2 \cdot 8 = 16$

- L'equació $5x^2 = 0$ és incompleta, del tipus $ax^2 + c = 0$, en la qual $a = 5$ i $c = 0$.

  Té una única solució, $x = 0$.

- L'equació $2x^2 + 16 = 0$ és incompleta, del tipus $ax^2 + c = 0$, en la qual $a = 2$ i $c = 16$.

  Operant-hi, tenim que: $2x^2 = -16 \rightarrow x^2 = -8 \rightarrow x = \pm\sqrt{-8}$

  Com que no existeix $\sqrt{-8}$, l'equació no té solució.

ACTIVITATS

1 Calcula, si és posible, les solucions de les equacions i comprova'n el resultat.

a) $4x^2 - 64 = 0$

b) $4x^2 + 64 = 0$

c) $4x^2 = 0$

IDENTIFICAR I RESOLDRE EQUACIONS DE SEGON GRAU

Nom: Curs: Data:

RESOLUCIÓ D'EQUACIONS DE SEGON GRAU COMPLETES

La fórmula general per resoldre una equació de segon grau completa és:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Segons el valor del discriminant, es poden donar tres casos:

- PRIMER CAS. Si $b^2 - 4ac > 0$, hi haurà dues solucions: $x_1 = +\sqrt{b^2 - 4ac}$ i $x_2 = -\sqrt{b^2 - 4ac}$
- SEGON CAS. Si $b^2 - 4ac = 0$, hi ha una única solució, $x = \frac{-b}{2a}$.
- TERCER CAS. Si $b^2 - 4ac < 0$, l'arrel $\sqrt{b^2 - 4ac}$ no és un nombre real i l'equació no té solució.

EXEMPLE

PRIMER CAS. En l'equació $x^2 - 8x + 15 = 0$, els coeficients són $a = 1$, $b = -8$ i $c = 15$.

Com que $b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 64 - 60 = 4$, tenim que:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Comprovem les solucions:

- Per a $x_1 = 5$: $x^2 - 8x + 15 = 5^2 - 8 \cdot 5 + 15 = 25 - 40 + 15 = 0$
- Per a $x_2 = 3$: $x^2 - 8x + 15 = 3^2 - 8 \cdot 3 + 15 = 9 - 24 + 15 = 0$

SEGON CAS. En l'equació $x^2 - 10x + 25 = 0$, els coeficients són $a = 1$, $b = -10$ i $c = 25$.

Com que $b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 100 - 100 = 0$, tenim que:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{10}{2} = 5$$

Comprovem la solució: $x^2 - 10x + 25 = 5^2 - 10 \cdot 5 + 25 = 25 - 50 + 25 = 0$

TERCER CAS. En l'equació $x^2 + 3x + 12 = 0$, els coeficients són $a = 1$, $b = 3$ i $c = 12$.

Com que $b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 9 - 48 = -39$, i no existeix $\sqrt{-39}$, l'equació no té solució.

2 Resol les equacions de segon grau i comprova les solucions.

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$

b) $x^2 - 12x + 36 = 0$

c) $x^2 - 3x + 2 = 0$

IDENTIFICAR I RESOLDRE EQUACIONS DE SEGON GRAU

Nom: Curs: Data:

3 Resol les equacions següents i comprova les solucions.

a) $(x - 1)(x + 6) - 4(3x - 4) = 0$

b) $x(x - 1) + 6(x + 1) = 0$

c) $(x + 5)(x - 1) - 2(x + 1) + (x + 11) = 0$

d) $(x + 3)(x - 5) + 2(x - 17) = 0$

RESOLDRE PROBLEMES AMB EQUACIONS DE PRIMER I SEGON GRAU

Nom: Curs: Data:

Recorda els quatre passos que has de seguir per resoldre un problema correctament:

a) **Llegir** detingudament l'enunciat.
b) **Plantejar** el problema, en aquest cas, l'equació.
c) **Resoldre** el problema, en aquest cas, l'equació.
d) **Comprovar** el resultat.

EXEMPLE

Calcula un nombre tal que si restem 1 a les seves dues terceres parts, obtenim 11.

ENUNCIAT	EXPRESSIÓ ALGEBRAICA
El nombre	x
$\frac{2}{3}$ parts del nombre	$\frac{2x}{3}$
$\frac{2}{3}$ parts del nombre menys 1	$\frac{2x}{3} - 1$
$\frac{2}{3}$ parts del nombre menys 1 **és igual** a 11	$\frac{2x}{3} - 1 = 11$

Resolem l'equació:

$$\frac{2x}{3} - 1 = 11 \rightarrow \frac{2x}{3} = 12 \rightarrow$$
$$\rightarrow 2x = 36 \rightarrow x = 18$$

Comprovem la solució:

$$\frac{2 \cdot 18}{3} - 1 = 11 \rightarrow \frac{36}{3} - 1 = 11 \rightarrow$$
$$\rightarrow 12 - 1 = 11 \rightarrow 11 = 11$$

ACTIVITATS

1 Calcula tres nombres consecutius la suma dels quals és 24.
(*Amb els nombres* x, x + 1 *i* x + 2, *planteja l'equació corresponent*.)

2 Calcula un nombre tal que la seva meitat és 5 unitats més petita que el seu triple. A partir de la taula, resol l'equació.

ENUNCIAT	EXPRESSIÓ ALGEBRAICA
El nombre	x
Meitat del nombre	$\frac{x}{2}$
Triple del nombre	$3x$
5 unitats més petit que el triple	$3x - 5$
La seva meitat és 5 unitats més petita que el seu triple	$\frac{x}{2} = 3x - 5$

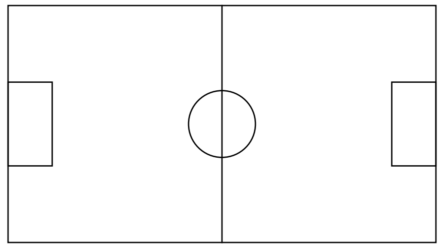
RESOLDRE PROBLEMES AMB EQUACIONS DE PRIMER I SEGON GRAU

Nom: Curs: Data:

3 El perímetre d'un camp de futbol és 280 m, i sabem que té 40 m més de llarg que d'ample. Calcula'n les dimensions (llargària i amplària).

El perímetre d'un polígon és igual a la suma dels costats:

$P = x + (x + 40) + x + (x + 40) = 2x + 2(x + 40) = 280$



4 En Pep té dos anys més que la seva germana Maria i tres anys més que en Joan. Sumant les edats dels tres, el resultat és 40. Calcula l'edat que té cadascun.

Anomenem x = l'edat d'en Pep, $x - 2$ = l'edat de la Maria i $x - 3$ = l'edat d'en Joan

5 El pare dels germans de l'exercici anterior té 46 anys. Sabent que en Pep té 15 anys, la Maria té 13 anys i en Joan té 12 anys, calcula quant temps ha de passar perquè la suma de les edats dels tres iguali l'edat del pare.

En els problemes en què apareixen edats actuals i futures convé elaborar una taula com la següent.

	EDAT ACTUAL	D'AQUÍ A *x* ANYS
Pep	15	$15 + x$
Maria	13	$13 + x$
Joan	12	$12 + x$
Pare	46	$46 + x$

Plantegem l'equació:

$$15 + x + 13 + x + 12 + x = 46 + x$$

6 La mare d'en Pep, la Maria i en Joan té 42 anys. Calcula quants anys han de passar perquè l'edat d'en Pep sigui la meitat que l'edat de la mare.

	EDAT ACTUAL	D'AQUÍ A *x* ANYS
Pep	15	$15 + x$
Mare	42	$42 + x$

Plantegem l'equació:

$$15 + x = \frac{42 + x}{2}$$

RESOLDRE PROBLEMES AMB EQUACIONS DE PRIMER I SEGON GRAU

Nom: Curs: Data:

7 La suma dels quadrats de dos nombres consecutius és 61. Calcula de quins nombres es tracta.

Si representem els nombres per x i $x + 1$, els quadrats seran x^2 i $(x + 1)^2$.
Recorda que el quadrat d'una suma és: $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1^2$

8 L'avi d'en Pep, la Maria i en Joan té una edat tal que, elevada al quadrat, és igual a 160 vegades la suma de les edats dels seus tres néts. Calcula l'edat de l'avi.

Tenim en compte que les edats són: Pep, 15 anys; Maria, 13 anys, i Joan, 12 anys.

9 Un camp de bàsquet té 1 000 m^2 d'àrea. Calcula'n les dimensions, sabent que té 30 m més de llarg que d'ample.

Plantegem i resolem l'equació de segon grau que s'obté en substituir en la fórmula de l'àrea del rectangle. Hem de tenir en compte que la solució negativa no és vàlida, ja que no té sentit una mesura de longitud negativa.

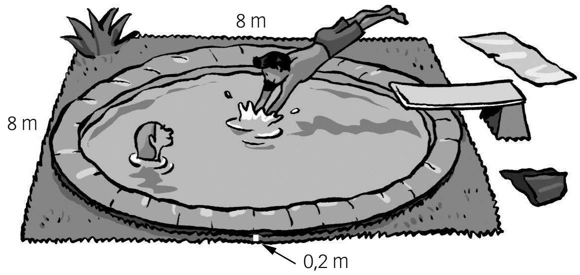
10 Si augmentem el costat d'un quadrat en 2 m, la superfície augmenta en 16 m^2. Calcula quines mesures tenia inicialment el costat del quadrat.

	ABANS	DESPRÉS
Costat	15	$x + 2$
Superfície	42	$(x + 2)^2$

Nom: Curs: Data:

ACTIVITATS

1 Quina superfície ocupa el jardí que envolta la piscina?



2 Quants germans hi ha en una família si per Nadal cada un fa un regal a cada germà i entre tots reuneixen 30 regals?

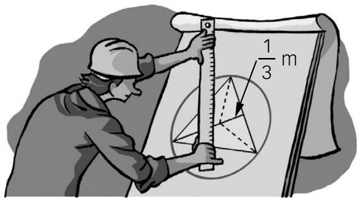
3 Calcula dos nombres consecutius, sabent que la suma dels quadrats és 1301.

4 En dues empreses, *A* i *B*, hi ha una plaça de comercial vacant. En l'empresa *A* paguen de salari fix 300 €, més 75 € per cada venda feta, i en l'empresa *B* es cobra 125 € per cada venda, sense salari fix. Quina empresa interessa més?

5 El perímetre d'un triangle equilàter inscrit en una circumferència mesura 6 m.

a) Quant mesura el radi de la circumferència?

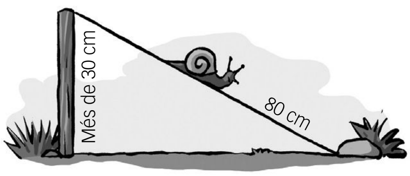
b) I l'àrea del triangle?



6 La hipotenusa d'un triangle rectangle té 80 cm i el catet més petit fa més de 30 cm.

a) Quina és la mesura del catet més gran?

b) Quina és l'àrea?

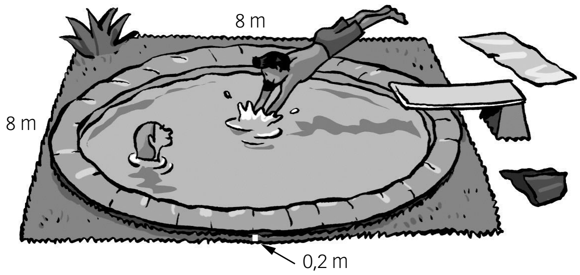


7 Resol la inequació en forma factoritzada.

$$(x + 1)(x - 2)(x + 3) \geq 0$$

Per fer-ho, utilitza la regla dels signes i comprova per a quins valors és positiu i negatiu aquest producte.

1 **Quina superfície ocupa el jardí que envolta la piscina?**



x = superfície de jardí

El radi de la piscina és: $r = \dfrac{8 - 2 \cdot 0{,}2}{2} = 3{,}8$ m

$8^2 = x + \pi \cdot 3{,}8^2 \rightarrow x = 18{,}6584$ m^2

2 **Quants germans hi ha en una família si per Nadal cada un fa un regal a cada germà i entre tots reuneixen 30 regals?**

Nombre de germans: x

$x(x - 1) = 30 \rightarrow x^2 - x - 30 = 0$

$x_1 = 6, x_2 = -5$ (solució negativa no válida)

Hi ha 6 germans.

3 **Calcula dos nombres consecutius, sabent que la suma dels quadrats és 1 301.**

Nombres: $x, x + 1$

$x^2 + (x + 1)^2 = 1301 \rightarrow 2x^2 + 2x - 1300 = 0$

$x_1 = 25, x_2 = -26$

Els nombres són: 25 i 26, o -26 i -25

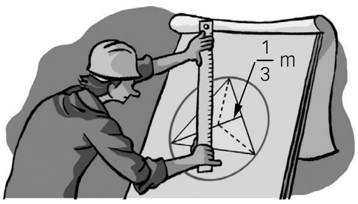
4 **En dues empreses, *A* i *B*, hi ha una plaça de comercial vacant. En l'empresa *A* paguen de salari fix 300 €, més 75 € per cada venda feta, i en l'empresa *B* es cobra 125 € per cada venda, sense salari fix. Quina empresa interessa més?**

Vendes: x Salari A: $300 + 75x$ Salari B: $125x$

$$300 + 75x > 125x \rightarrow x < 6$$

Interessa més l'empresa *A* si es fan menys de 6 vendes; l'empresa *B* interessa si es fan més de 6 vendes i, en el cas de fer 6 vendes, tant és l'empresa que es triï.

5 **El perímetre d'un triangle equilàter inscrit en una circumferència mesura 6 m.**



a) Quant mesura el radi de la circumferència?

b) I l'àrea del triangle?

Costat = 2 m

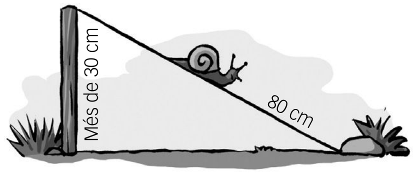
Alçada = $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ m

Per ser un triangle equilàter, el baricentre coincideix amb el centre de la circumferència i el radi és dues terceres parts de l'alçada.

Radi = $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ m

Àrea = $\dfrac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ m^2

6 **La hipotenusa d'un triangle rectangle té 80 cm i el catet més petit fa més de 30 cm.**



a) Quina és la mesura del catet més gran?

b) Quina és l'àrea?

a) x = catet més gran
y = catet més petit

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 80^2 \\ 30 < y \le x \end{array}\right\}$$

Per a $y = 30 \rightarrow x = \sqrt{80^2 - 30^2} = \sqrt{5\,500} = 74{,}16$ cm

Per a $y = x \longrightarrow 2x^2 = 80^2 \rightarrow x = \sqrt{3\,200} = 56{,}57$ cm

$56{,}57 \text{ cm} \le x < 74{,}16$ cm

7 **Resol la inequació en forma factoritzada.**

$$(x + 1)(x - 2)(x + 3) \ge 0$$

Per fer-ho, utilitza la regla dels signes i comprova per a quins valors és positiu i negatiu aquest producte.

		-3		-1		2	
$x + 1$	$-$		$-$		$+$		$+$
$x - 2$	$-$		$-$		$-$		$+$
$x + 3$	$-$		$+$		$+$		$+$
$(x + 1)(x - 2)(x + 3) \rightarrow$	$-$	-3	$+$	-1	$-$	2	$+$

La solució és els intervals $[-3, -1]$ i $[2, +\infty]$.

ESTUDIAR SISTEMES DE DUES EQUACIONS AMB DUES INCÒGNITES

Nom: Curs: Data:

- Un **sistema de dues equacions amb dues incògnites** és un conjunt de dues equacions de la forma:

$$\left.\begin{array}{r} ax + by = k \\ a'x + b'y = k' \end{array}\right\}$$

- **Incògnites:** x, y
- **Coeficients** de les incògnites: a, a', b, b'
- **Termes independents:** k, k'
- Una **solució** d'un sistema d'equacions amb dues incògnites és un parell de nombres que verifiquen les dues equacions.

EXEMPLE

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y = 3 \\ x + y = 3 \end{array}\right\}$$

Les incògnites són: x i y
Els coeficients de les incògnites són: 2, -1, 1 i 1
Els termes independents són: 3 i 3

Les parelles de valors de la taula compleixen la primera equació:

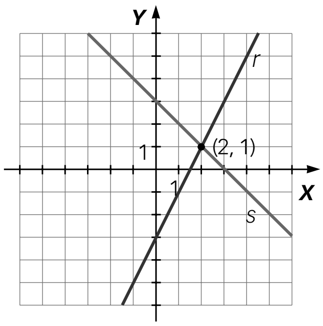
x	0	1	2	3	4	5
y	-3	1	1	3	5	7

Les parelles de valors de la taula compleixen la segona equació:

x	0	1	2	3	4	5
y	-3	1	1	3	5	7

Com veiem, la parella de valors (2, 1) compleix les dues equacions, de manera que serà la solució del sistema.

Si representem les parelles de valors (x, y) de les taules anteriors, obtenim dues rectes, r i s, que es tallen en el punt (2, 1), que és la solució del sistema.

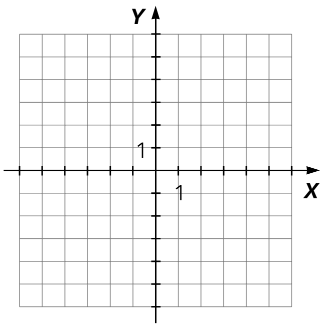


ACTIVITATS

1 Calcula les parelles de valors que són solucions de les equacions del sistema i determina quina és la solució.

Representa les rectes corresponents a cada una de les equacions, i comprova que el punt en què es tallen és la solució del sistema.

$$\left.\begin{array}{r} x + 5y = 8 \\ 3x - 2y = 7 \end{array}\right\}$$



ESTUDIAR SISTEMES DE DUES EQUACIONS AMB DUES INCÒGNITES

Nom: Curs: Data:

Dos sistemes d'equacions són **equivalents** si tenen la mateixa solució.

EXEMPLE

$\left.\begin{array}{r}3x - y = 2\\ x + y = 6\end{array}\right\}$ i $\left.\begin{array}{r}x - y = -2\\ 2x + y = 8\end{array}\right\}$ són equivalents, ja que tenen la mateixa solució: $x = 2, y = 4$

Si representem gràficament els dos sistemes, obtenim:

Recta $r: 3x - y = 2$

x	0	1	2	3
y	−2	1	4	7

Recta $t: x - y = -2$

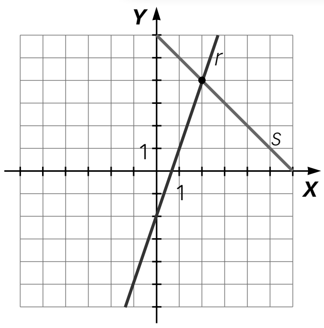
x	0	1	2	3
y	2	3	4	7

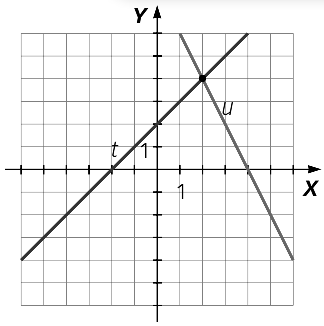
Recta $s: x + y = 6$

x	0	1	2	3
y	6	5	4	3

Recta $u: 2x + y = 8$

x	0	1	2	3
y	8	6	4	2





El punt en què es tallen els dos parells de rectes és el mateix: (2, 4), que és la solució dels dos sistemes. Són sistemes equivalents.

2 Representa gràficament les dues equacions dels sistemes. Són equivalents?

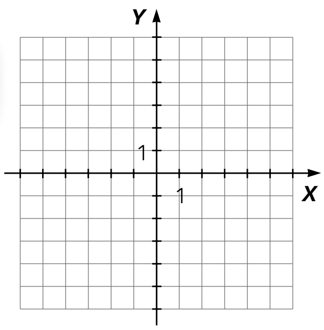
a) $\left.\begin{array}{r}x - 3y = 4\\ x + y = 0\end{array}\right\}$

Recta $r: x - 3y = 4$

x	0	1	2	3
y				

Recta $s: x + y = 0$

x	0	1	2	3
y				



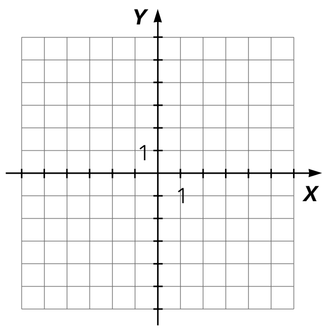
b) $\left.\begin{array}{r}5x - y = 6\\ x + y = 2\end{array}\right\}$

Recta $t: 5x - y = 6$

x	0	1	2	3
y				

Recta $u: x + y = 2$

x	0	1	2	3
y				



RESOLDRE SISTEMES DE DUES EQUACIONS AMB DUES INCÒGNITES

Nom: Curs: Data:

- Una **solució** d'un sistema de dues equacions amb dues incògnites és un parell de nombres que verifica les dues equacions. Si un sistema té solució, es diu que és **compatible**.
- **Resoldre un sistema d'equacions amb dues incògnites** és trobar la solució o les solucions del sistema.

Exemple

Estudia si el parell de nombres (2, 3) és solució del sistema d'equacions $\left.\begin{array}{r}\mathbf{2x - y = 1}\\ \mathbf{x + 2y = 8}\end{array}\right\}$.

Per veure si el parell de nombres (2, 3) és solució del sistema, hem de comprobar si compleixen o no les dues equacions. Substituint en les dues equacions, tenim:

$$\left.\begin{array}{r}2x - y = 1\\ x + 2y = 8\end{array}\right\} \begin{array}{l}\rightarrow\ 2\cdot 2 - 3 = 4 - 3 = 1\\ \rightarrow\ 2 + 2\cdot 3 = 2 + 6 = 8\end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\b\end{array}}\right\} \begin{array}{l}\rightarrow \text{ Compleix l'equació.}\\ \rightarrow \text{ Compleix l'equació.}\end{array}$$

Per tant, el parell de nombres (2, 3) és una solució del sistema, i el sistema és compatible.

Per resoldre un sistema d'equacions amb dues incògnites hi ha tres mètodes de resolució:

(I) Mètode de **substitució**.
(II) Mètode d'**igualació**.
(III) Mètode de **reducció**.

Per resoldre un sistema de dues equacions amb dues incògnites pel **mètode de substitució** cal seguir aquests passos:

- **Aïllar** la incògnita en una de les equacions.
- **Substituir** l'expressió obtinguda en l'altra equació.
- **Resoldre** l'equació amb una incògnita que en resulta.
- **Substituir** el valor obtingut en qualsevol de les equacions per obtenir l'altra incògnita.
- **Comprovar** que la solució obtinguda verifica les dues equacions.

Exemple

Resol el següent sistema d'equacions pel mètode de substitució: $\left.\begin{array}{r}\mathbf{2x - y = 1}\\ \mathbf{x + 2y = 8}\end{array}\right\}$

- Triem per **aïllar** la incògnita x de la segona equació: $x = 8 - 2y$
- **Substituïm** aquesta incògnita en la primera equació:

$$2x - y = 1 \ \rightarrow\ 2\cdot(8 - 2y) - y = 1$$

- **Resolem** l'equació amb la incògnita y obtinguda:

$$16 - 4y - y = 1 \ \rightarrow\ 16 - 5y = 1 \ \rightarrow\ -5y = 1 - 16 = -15 \ \rightarrow\ y = \frac{-15}{-5} \ \rightarrow\ y = 3$$

- **Substituïm** el valor $y = 3$ en qualsevol de les dues equacions, per exemple en la primera:

$$2x - y = 1 \ \rightarrow\ 2x - 3 = 1 \ \rightarrow\ 2x = 4 \ \rightarrow\ x = 2$$

- **Comprovem** la solució obtinguda. Per fer-ho hem de substituir el parell de valors (2, 3) en les dues equacions:

$$\left.\begin{array}{r}2x - y = 1\\ x + 2y = 8\end{array}\right\} \begin{array}{l}\rightarrow\ 2\cdot 2 - 3 = 4 - 3 = 1\\ \rightarrow\ 2 + 2\cdot 3 = 2 + 6 = 8\end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\b\end{array}}\right\} \begin{array}{l}\rightarrow \text{ Compleix l'equació.}\\ \rightarrow \text{ Compleix l'equació.}\end{array}$$

Per tant, el parell de valors $x = 2$, $y = 3$ és la solució del sistema, i el sistema és compatible.

RESOLDRE SISTEMES DE DUES EQUACIONS AMB DUES INCÒGNITES

Nom: Curs: Data:

ACTIVITATS

1 Resol els següents sistemes pel mètode de substitució i comprova les solucions.

a) $\left.\begin{array}{r} x - y = 2 \\ 2x + y = 13 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 9 \\ 2x - 9y = 5 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x - y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 0 \\ 3x - y = 14 \end{array}\right\}$

2 Resol pel mètode de substitució i comprova la solució del següent sistema d'equacions amb fraccions.

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{5x+3}{6} + y = 2 \\ \dfrac{2x}{3} + 3y = -1 \end{array}\right\}$$

Per resoldre'l, seguim aquests passos.

1r En cada equació, reduïm a comú denominador:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{5x+3}{6} + \dfrac{6y}{6} = \dfrac{6 \cdot 2}{6} \\ \dfrac{2x}{3} + \dfrac{3y \cdot 3}{3} = -\dfrac{1 \cdot 3}{3} \end{array}\right\}$$

2n Eliminem els denominadors:

$$\left.\begin{array}{r} 5x + 3 + 6y = 12 \\ 2x + 9y = -3 \end{array}\right\}$$

3r Resolem per substitució el sistema resultant i comprovem la solució:

$$\left.\begin{array}{r} 5x + 6y = 9 \\ 2x + 9y = -3 \end{array}\right\}$$

RESOLDRE SISTEMES DE DUES EQUACIONS AMB DUES INCÒGNITES

Nom: Curs: Data:

Per resoldre un sistema de dues equacions amb dues incògnites pel **mètode d'igualació**:

- **Substituir** la mateixa incògnita en les dues equacions.
- **Igualar** les expressions obtingudes.
- **Resoldre** l'equació amb una incògnita que en resulta.
- **Substituir** el valor obtingut en qualsevol de les dues equacions per obtenir l'altra incògnita.
- **Comprovar** que la solució obtinguda verifica les dues equacions.

EXEMPLE

Resol el següent sistema d'equacions pel mètode d'igualació.

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ x + y &= 12 \end{aligned}\right\}$$

- **Aïllem** la incògnita y de les dues equacions:

$$\left.\begin{aligned} y &= 2x - 3 \\ y &= 12 - x \end{aligned}\right\}$$

- **Igualem** les expressions obtingudes: $2x - 3 = 12 - x$
- **Resolem** l'equació amb la incògnita x obtinguda:

$$2x + x = 12 + 3 \rightarrow 3x = 15 \rightarrow x = 5$$

- **Substituïm** el valor $x = 5$ en qualsevol de les dues equacions, per exemple en la primera:

$$2x - y = 3 \rightarrow 2 \cdot 5 - y = 3 \rightarrow 10 - 3 = y \rightarrow y = 7$$

- **Comprovem** la solució obtinguda. Per fer-ho hem de substituir el parell de valors (5, 7) en les dues equacions:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ x + y &= 12 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 2 \cdot 5 - 7 = 10 - 7 &= 3 \\ 5 + 7 &= 12 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow \text{Compleix l'equació.} \\ &\rightarrow \text{Compleix l'equació.} \end{aligned}$$

Per tant, el parell de valors $x = 5$, $y = 7$ és la solució del sistema i el sistema és compatible.

3 Resol pel mètode d'igualació i comprova la solució del següent sistema d'equacions amb fraccions.

$$\left.\begin{aligned} \frac{x+1}{2} + \frac{2y+2}{3} &= 2 \\ \frac{x}{3} - \frac{y-4}{6} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

1r Reduïm a comú denominador les dues equacions:

$$\left.\begin{aligned} \frac{3(x+1)}{6} + \frac{2(2y+2)}{6} &= \frac{12}{6} \\ \frac{2x}{6} - \frac{y-4}{6} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

2n Eliminem els denominadors:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 3 + 4y + 4 &= 12 \\ 2x - y + 4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

3r Resolem per igualació el sistema resultant:

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 5 \\ 2x - y &= -4 \end{aligned}$$

Nom: Curs: Data:

4 Resol pel mètode d'igualació i comprova la solució dels sistemes d'equacions amb fraccions.

a) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y+4}{3} = 1 \\ x - \dfrac{y-1}{3} = 2 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{y+1}{5} - y = -2 \\ \dfrac{x+2}{3} - \dfrac{y}{5} = -\dfrac{1}{15} \end{array}\right\}$

Per resoldre un sistema de dues equacions amb dues incògnites pel **mètode de reducció**:

- **Buscar un sistema equivalent** en el qual els coeficients d'una mateixa incògnita siguin iguals o oposats.
- **Restar** o **sumar** les dues equacions obtingudes, eliminant una incògnita.
- **Resoldre** l'equació amb una sola incògnita que en resulta.
- **Substituir** el valor obtingut en qualsevol de les dues equacions per obtenir l'altra incògnita.
- **Comprovar** que la solució obtinguda verifica les dues equacions.

EXEMPLE

Resol el següent sistema d'equacions pel mètode de reducció.

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x - 2y = 1} \\ \boldsymbol{5x + 3y = 18} \end{array}\right\}$$

- Obtenim un **sistema equivalent**. Per fer-ho, **aïllem** la incògnita que sigui més senzilla per reduir, en aquest cas x. Multipliquem la primera equació per 5:

$$5\,(x - 2y = 1) \rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x - 10y = 5 \\ 5x + 3y = 18 \end{array}\right\}$$

- **Restem** les dues equacions del sistema per eliminar els termes amb x i reduir el sistema:

$$\begin{array}{rcr} \cancel{5x} - 10y & = & 5 \\ \cancel{5x} + 3y & = & 18 \\ \hline -\,13y & = & -13 \end{array}$$

- **Resolem** l'equació obtinguda:

$$-13y = -13 \rightarrow y = 1$$

- **Substituïm** el valor obtingut en una de les dues equacions del sistema, en la que resulti més senzilla per operar, en aquest cas la primera:

$$x - 2y = 1 \rightarrow x - 2 \cdot 1 = 1 \rightarrow x = 3$$

- **Comprovem** el resultat. Per fer-ho hem de substituir el parell de valors (3, 1) en les dues equacions:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y = 1 \\ 5x + 3y = 18 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3 - 2 \cdot 1 = 1 \\ 5 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 18 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 1 = 1 \\ 18 = 18 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Compleix l'equació.} \\ \rightarrow \text{Compleix l'equació.} \end{array}$$

Per tant, el parell de valors $x = 3$, $y = 1$ és la solució del sistema i el sistema és compatible.

RESOLDRE SISTEMES DE DUES EQUACIONS AMB DUES INCÒGNITES

Nom: Curs: Data:

5 Resol el següent sistema pel mètode de reducció i comprova la solució.

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{3x - 2y = 7} \\ \boldsymbol{2x + 3y = 9} \end{aligned}\right\}$$

- Obtenim un **sistema equivalent**:

  En aquest cas, la variable *x* o la variable *y* no apareixen multiplicades per 1 en cap dels termes de les equacions, de manera que podem triar l'una o l'altra. Triem, per exemple, la variable *y*.

  Per aconseguir que els dos termes amb variable *y* tinguin el mateix coeficient, cal multiplicar la primera equació per 3 i la segona per 2, de manera que:

$$\left.\begin{aligned} (3x - 2y = 7) \\ (2x + 3y = 9) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \xrightarrow{\cdot 3} \\ \xrightarrow{\cdot 2} \end{aligned} \left.\begin{aligned} 9x - 6y = 21 \\ 4x + 6y = 18 \end{aligned}\right\}$$

- **Sumem** les dues equacions per eliminar els termes amb *y*:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 9x - \cancel{6y} = 21 \\ 4x + \cancel{6y} = 18 \end{array} \\ \hline 13x \qquad = 39 \end{array}$$

- **Resolem** l'equació obtinguda: $x = \ldots$
- **Substituïm** aquest valor en qualsevol de les dues equacions per calcular el valor de *y*:

- **Comprovem** la solució:

6 Resol pel mètode de reducció els sistemes i comprova les solucions.

a) $\left.\begin{aligned} 7x + 3y = 2 \\ 5x + 2y = 1 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 3x - 3y = 3 \\ 2x + 5y = 72 \end{aligned}\right\}$

RESOLDRE SISTEMES DE DUES EQUACIONS AMB DUES INCÒGNITES

Nom: Curs: Data:

7 Resol els següents sistemes pels tres mètodes. Comprova la solució i decideix quin dels mètodes es més senzill per resoldre cada sistema.

a) $\left.\begin{array}{r} 4x - 5y = 0 \\ 3x - 4y = -1 \end{array}\right\}$

- Per substitució:
- Per igualació:
- Per reducció:

En aquest cas, el mètode més adequat és:

b) $\left.\begin{array}{r} x - y = -1 \\ 2x - y = 19 \end{array}\right\}$

- Per substitució:
- Per igualació:
- Per reducció:

En aquest cas, el mètode més adequat és:

RESOLDRE PROBLEMES AMB SISTEMES D'EQUACIONS

Nom: Curs: Data:

Per resoldre un problema amb un sistema de dues equacions amb dues incògnites cal seguir els passos següents.

1r **Comprendre** el problema.

2n **Plantejar** les equacions i formar el sistema d'equacions.

3r **Resoldre** el sistema d'equacions a través de qualsevol dels tres mètodes.

4t **Comprovar** que la solució compleix les condicions de l'enunciat.

EXEMPLE

La suma dels gols marcats per dos equips és 30, i quan els dos equips hagin marcat 5 gols més, la diferència entre els dos equips serà de 2 gols. Calcula els gols marcats per cada equip.

1r Llegeix el problema tantes vegades com calgui fins a **comprendre**'n l'enunciat.

2n **Planteja** les equacions i forma el sistema:

- Triar les incògnites: x = nombre de gols marcats per l'equip A
  y = nombre de gols marcats per l'equip B

- Plantejar el problema:

		ARA		QUAN HAGIN MARCAT 5 GOLS MÉS
Equip A	$\longrightarrow$	x	$\longrightarrow$	$x + 5$
Equip B	$\longrightarrow$	y	$\longrightarrow$	$y + 5$
		$x + y = 30$		$(x + 5) - (y + 5) = 2$

- Formar el sistema d'equacions:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 30 \\ (x + 5) - (y + 5) &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x + y &= 30 \\ x - y &= 2 \end{aligned}\right\}$$

3r **Resol** el sistema pel mètode que et sembli més convenient, en aquest cas per reducció.
Sumem les dues equacions per eliminar els termes amb y:

$$\begin{array}{r} + \left.\begin{aligned} x + y &= 30 \\ x - y &= \ \ 2 \end{aligned}\right\} \\ \hline 2x = 32 \end{array} \rightarrow x = 16$$

Substituïnt en la primera equació: $16 + y = 30 \rightarrow y = 14$
Per tant, l'equip A ha marcat 16 gols i l'equip B, 14 gols.

4t **Comprovem** la solució:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 30 \\ x - y &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 16 + 14 &= 30 \\ 16 - 14 &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 30 &= 30 \\ 2 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Les dues equacions es compleixen i la solució obtinguda és correcta.

ACTIVITATS

1 Calcula dos nombres la suma dels quals és 15 i la seva diferència és 1.

RESOLDRE PROBLEMES AMB SISTEMES D'EQUACIONS

Nom: Curs: Data:

2 En una granja, entre gallines i ovelles hi ha 27 animals, i comptant les potes hi ha 76 potes en total. Quantes gallines i ovelles hi ha?

3 En un aparcament hi ha 90 vehicles, entre cotxes i motos. Si en sortissin 40 cotxes i 10 motos, el nombre de cotxes igualaria el nombre de motos. Calcula el nombre de cotxes i de motos que hi ha a l'aparcament.

4 Una nena compra 2 refrescos i 3 bosses de pipes per 3,50 €, i un nen compra 3 refrescos i 5 bosses de pipes per 5,50 €. Calcula quant val cada refresc i cada bossa de pipes.

Nom: Curs: Data:

ACTIVITATS

1 Determina dos nombres la suma dels quals és 5 i la suma dels seus quadrats és 13.

2 Calcula dos nombres sabent que la seva suma és 16 i la suma dels seus inversos és $\frac{1}{3}$.

3 Per la mescla de 400 kg de pinso de tipus A amb 800 kg de pinso de tipus B s'han pagat 2 200 €. Calcula el preu de cada tipus de pinso sabent que si es barregés 1 kg de pinso de cada tipus la mescla costaria 3,90 €.

4 En un institut la relació del nombre de nois amb el nombre de noies era de $\frac{8}{9}$, però al juny aquesta relació era de $\frac{25}{21}$, ja que van abandonar el centre 20 nois i el 30 % de les noies. Quants alumnes van acabar el curs?

5 La capacitat màxima d'una sala de festes és de 600 persones. Si hi ha més del doble de dones que d'homes, quina és la possible distribució de persones a la sala?

6 El pressupost per organitzar una festa popular puja com a màxim a 6 700 €. Si s'especifica que com a mínim el 30 % es gastarà en jocs infantils i que l'orquestra per al ball no podrà superar el 50 % del pressupost, però que almenys s'hi gastaran 1 000 €, quants diners es dedicaran a jocs infantils? I a l'orquestra per al ball?

1 Determina dos nombres la suma dels quals és 5 i la suma del seus quadrats és 13.

Nombres: x, y

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{array}\right\} \rightarrow x = 5 - y$$

$$x^2 + y^2 = 13 \xrightarrow{x = 5 - y} 25 - 10y + 2y^2 = 13 \rightarrow$$
$$\rightarrow y^2 - 5y + 6 = 0 \rightarrow y_1 = 2, y_2 = 3$$

$$x = 5 - y \xrightarrow{y_1 = 2} x_1 = 3$$

$$x = 5 - y \xrightarrow{y_2 = 3} x_2 = 2$$

Els nombres són 2 i 3.

2 Calcula dos nombres sabent que la seva suma és 16 i la suma dels seus inversos és $\frac{1}{3}$.

Nombres: x, y

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 16 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow x = 16 - y \\ \frac{1}{x} \rightarrow 3y + 3x = xy \end{array}$$

$$3y + 3x = xy \xrightarrow{x = 16 - y} 3y + 48 - 3y = 16y - y^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow y^2 - 16y + 48 = 0 \rightarrow y_1 = 12, y_2 = 4$$

$$x = 16 - y \xrightarrow{y_1 = 12} x_1 = 4$$

$$x = 16 - y \xrightarrow{y_2 = 4} x_2 = 12$$

Els nombres són 4 i 12.

3 Per la mescla de 400 kg de pinso de tipus A amb 800 kg de pinso de tipus B s'han pagat 2 200 €. Calcula el preu de cada tipus de pinso sabent que si es barregés 1 kg de pinso de cada tipus la mescla costaria 3,90 €.

Preu del pinso A: x Preu del pinso B: y

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 3{,}9 \\ 400x + 800y = 2200 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow x = 3{,}9 - y \\ \rightarrow 2x + 4y = 11 \end{array}$$

$$2x + 4y = 11 \xrightarrow{x = 3{,}9 - y} 7{,}8 - 2y + 4y = 11 \rightarrow y = 1{,}6$$

$$x = 3{,}9 - y \xrightarrow{1{,}6} x = 2{,}3$$

El pinso A costa 2,30 €/kg i el pinso B costa 1,60 €/kg.

4 En un institut la relació del nombre de nois amb el nombre de noies era de $\frac{8}{9}$, però al juny aquesta relació era de $\frac{25}{21}$, ja que van abandonar el centre 20 nois i el 30 % de les nois. Quants alumnes van acabar el curs?

Nombre de nois que van començar el curs: x

Nombre de noies que van començar el curs: y

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{y} = \frac{8}{9} \\ \frac{x - 20}{0{,}70y} = \frac{25}{21} \end{array}\right\}$$

$$\frac{9x}{8} = \frac{6x - 120}{5} \rightarrow 45x = 48x - 960 \rightarrow x = 320$$

$$y = \frac{9x}{8} \xrightarrow{x = 320} y = 360$$

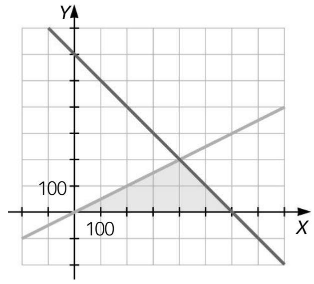
Van començar el curs 320 nois i 360 noies.
I el van acabar 300 nois i 252 noies.

5 La capacitat màxima d'una sala de festes és de 600 persones. Si hi ha més del doble de dones que d'homes, quina és la possible distribució de persones a la sala?

x = nre. de dones y = nre. d'homes

Hem de resoldre el següent sistema d'inequacions:

$$\left.\begin{array}{r} x + y \leq 600 \\ 2y < x \end{array}\right\}$$



Valdria qualsevol solució entera que estigués dins del recinte acolorit. Per exemple: ($x = 300$, $y = 100$)

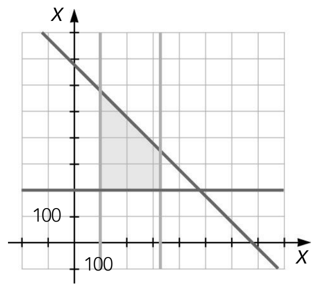
6 El pressupost per organitzar una festa popular puja com a màxim a 6 700 €. Si s'especifica que com a mínim el 30 % es gastarà en jocs infantils i que l'orquestra per al ball no podrà superar el 50 % del pressupost, però que almenys s'hi gastaran 1 000 €, quants diners es dedicaran a jocs infantils? I a l'orquestra per al ball?

x = despesa en jocs infantils
y = despesa en l'orquestra

Hem de resoldre el següent sistema d'inequacions:

$$\left.\begin{array}{r} x + y \leq 6\,700 \\ 1000 \leq x \leq \frac{6\,700}{2} \\ y \geq 2\,010 \end{array}\right\}$$

La solució és el recinte acolorit.

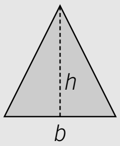


CALCULAR ÀREES DE POLÍGONS I FIGURES CIRCULARS

Nom: Curs: Data:

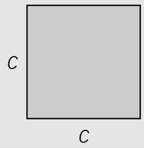
ÀREA DE POLÍGONS

Àrea del triangle



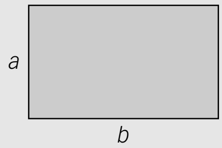
$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Àrea del quadrat



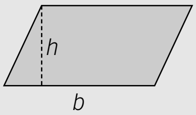
$$A = c \cdot c$$

Àrea del rectangle



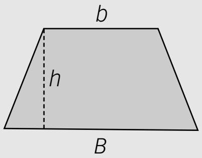
$$A = b \cdot a$$

Àrea del paral·lelogram



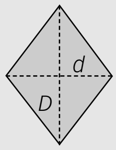
$$A = b \cdot h$$

Àrea del trapezi



$$A = \left(\frac{B + b}{2}\right) \cdot h$$

Àrea del rombe



$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

ACTIVITATS

1 Calcula l'àrea dels polígons següents.

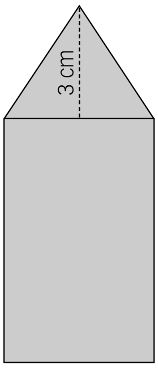
a) Un triangle de base 2 cm i altura 3 cm.

b) Un trapezi les bases del qual sumen 12 cm i d'altura 3 cm.

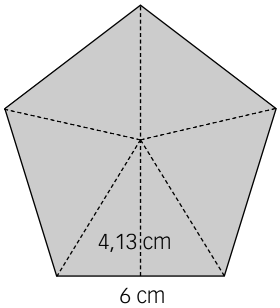
c) Un rombe la diagonal més gran del qual és el doble que la més petita que té 2 cm.

2 Calcula l'àrea de les següents figures poligonals.

a)



b)

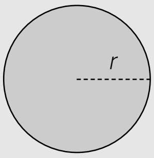


CALCULAR ÀREES DE POLÍGONS I FIGURES CIRCULARS

Nom: Curs: Data:

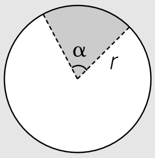
ÀREA DE FIGURES CIRCULARS

Àrea del cercle



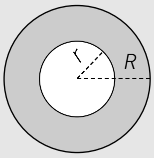
$\boldsymbol{A} = \pi \cdot \boldsymbol{r}^2$

Àrea del sector circular



$\boldsymbol{A} = \dfrac{\pi \cdot \boldsymbol{r}^2 \cdot \alpha}{360}$

Àrea de la corona circular



$\boldsymbol{A} = \pi \cdot (\boldsymbol{R}^2 - \boldsymbol{r}^2)$

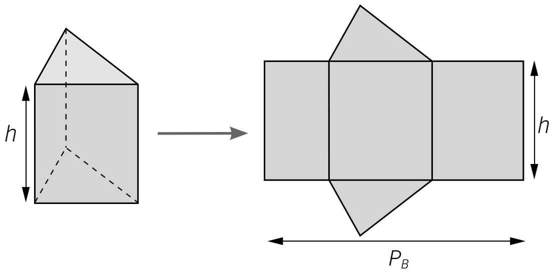
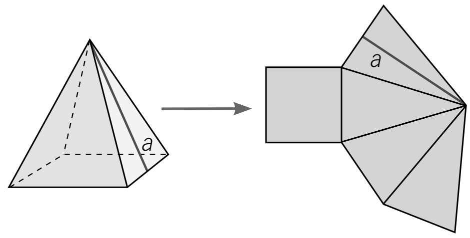
3 Calcula l'àrea d'un cercle el radi del qual és la meitat que el perímetre d'un triangle equilàter de costat 3 cm.

4 Calcula l'àrea d'un sector circular de radi 12 cm i amplitud 120°.

5 Calcula l'àrea d'una corona circular limitada per dues circumferències els diàmetres de les quals tenen 6 cm i 10 cm, respectivament.

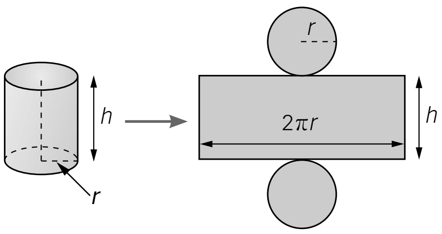
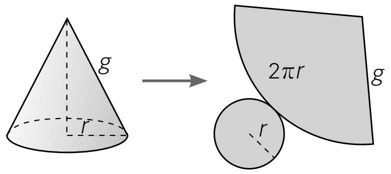
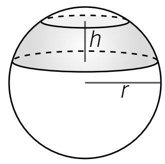
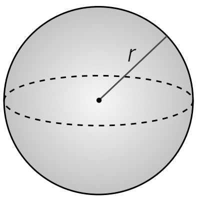
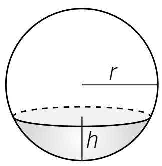
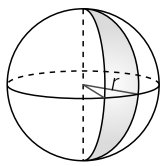
CALCULAR ÀREES I VOLUMS DE COSSOS GEOMÈTRICS

Nom: Curs: Data:

Prisma	Piràmide
	
Àrea $= A_{\text{Lateral}} + 2 \cdot A_{\text{Base}} = P_{\text{Base}} \cdot h + 2 \cdot A_{\text{Base}}$	Àrea $= A_{\text{Lateral}} + A_{\text{Base}} = \dfrac{P_{\text{Base}} \cdot a}{2} + A_{\text{Base}}$

ACTIVITATS

1 Calcula l'àrea d'un prisma regular i una piràmide regular la base dels quals és un quadrat de 3 cm de costat i que tenen una altura de 6 cm.

Cilindre	Con	Zona esfèrica
		
$A_{\text{Cilindre}} = A_{\text{Lateral}} + 2A_{\text{Base}} =$ $= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$	$A_{\text{Con}} = A_{\text{Lateral}} + A_{\text{Base}} = \pi g^2 \cdot \dfrac{2\pi r}{2\pi g} + \pi r^2 =$ $= \pi rg + \pi r^2 = \pi r(g + r)$	$A_{\text{Zona}} = 2\pi rh$
Esfera	**Casquet esfèric**	**Fus esfèric**
		
$A_{\text{Esfera}} = 4\pi r^2$	$A_{\text{Casquet}} = 2\pi rh$	$A_{\text{Fus}} = \dfrac{4\pi r^2 \alpha}{360}$

2 Calcula l'àrea dels següents cossos de revolució.

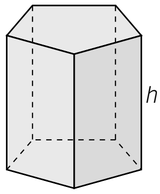
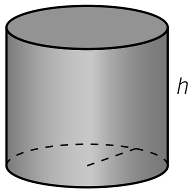
a) Una esfera de 10 cm de diàmetre.

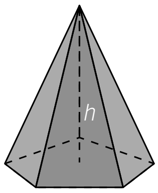
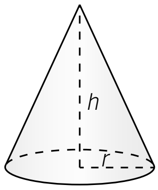
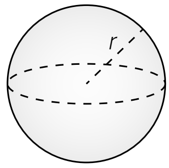
b) Un cilindre de 10 cm d'altura i 5 cm de radi de la base.

c) Un con de 5 cm de radi de la base i 10 cm d'altura.

CALCULAR ÀREES I VOLUMS DE COSSOS GEOMÈTRICS

Nom: Curs: Data:

Prisma	Cilindre
 $V_{\text{Prisma}} = A_{\text{Base}} \cdot h$	 $V_{\text{Cilindre}} = A_{\text{Base}} \cdot h = \pi r^2 \cdot h$

Piràmide	Con	Esfera
 $V_{\text{Piràmide}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Base}} \cdot h$	 $V_{\text{Con}} = \frac{A_{\text{Base}} \cdot h}{3} = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$	 $V_{\text{Esfera}} = V = \frac{4}{3}\pi r^3$

3 Calcula l'àrea d'un prisma regular i una piràmide regular la base dels quals és un quadrat de 3 cm de costat i que tenen una altura de 6 cm.

4 Calcula el volum dels següents cossos de revolució.

a) Una esfera de 10 cm de diàmetre.

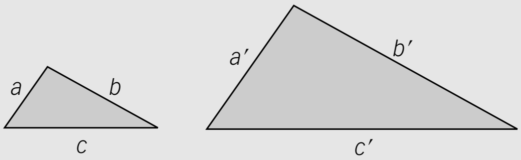
b) Un cilindre de 10 cm d'altura i 5 cm de radi de la base.

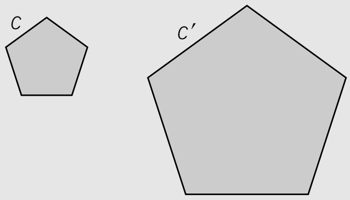
c) Un con de 5 cm de radi de la base i 10 cm d'altura.

RELACIONAR LES ÀREES DE FIGURES SEMBLANTS

Nom: Curs: Data:

El quocient entre les àrees de dues figures semblants és igual al quadrat de la **raó de semblança**.





$\frac{a}{a'} = r =$ raó de semblança $\rightarrow \frac{S}{S'} = r^2$

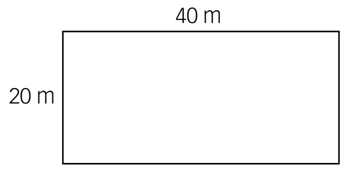
$\frac{c}{c'} = r =$ raó de semblança $\rightarrow \frac{S}{S'} = r^2$

EXEMPLE

Un agricultor ha tancat el seu hort amb una tanca de filferro, que té la forma i les dimensions de la figura.

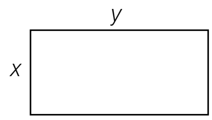
a) Quants metres de tanca necessitaria per tancar un hort semblant, amb la meitat de superfície que l'anterior?

b) I si volgués tancar un hort semblant que fos tres vegades més gran?



a) L'hort inicial té aquesta superfície: $S = 20 \cdot 40 = 800$ m^2. Com que el nou hort té la meitat de superfície que l'anterior, tindrà: $\frac{800}{2} = 400$ m^2. Aplicant-hi la relació entre les dues superfícies, obtindrem la raó de semblança: $\frac{800}{400} = r^2 \rightarrow r = \sqrt{2}$

Així, el nou hort tindrà:



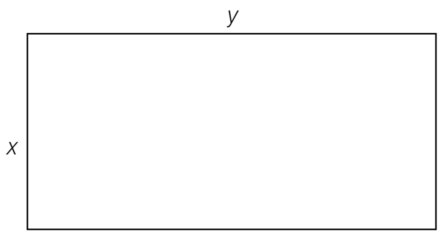
$$\frac{20}{x} = \sqrt{2} \rightarrow x = \frac{20}{\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} \text{ m}$$

$$\frac{40}{y} = \sqrt{2} \rightarrow y = \frac{40}{\sqrt{2}} = \frac{40\sqrt{2}}{2} = 20\sqrt{2} \text{ m}$$

b) Com que el nou hort té una superfície tres vegades més gran que la primera, tindrà: $3 \cdot 800 = 2\,400$ m^2. Aplicant-hi la relació entre les dues superfícies, obtindrem la raó de semblança:

$$\frac{800}{2\,400} = r^2 \rightarrow \frac{1}{3} = r^2 \rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Així, el nou hort tindrà:

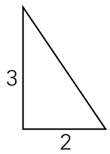


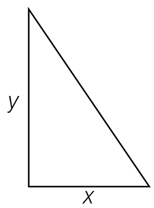
$$\frac{20}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = \frac{20 \cdot 3}{\sqrt{3}} = \frac{60\sqrt{3}}{3} = 20\sqrt{3} \text{ m}$$

$$\frac{40}{y} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow y = \frac{40 \cdot 3}{\sqrt{3}} = \frac{120\sqrt{3}}{3} = 40\sqrt{3} \text{ m}$$

ACTIVITATS

1 Sabent que la relació de semblança entre els dos triangles de la figura és de $\frac{1}{4}$, calcula l'àrea del segon triangle.





CONÈIXER I APLICAR ESCALES

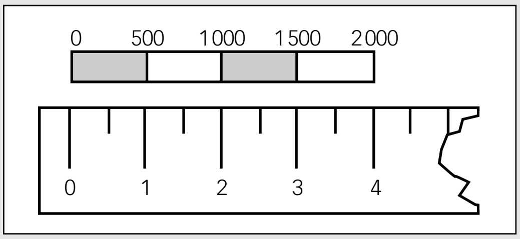
Nom: Curs: Data:

L'**escala** és la raó de semblança entre l'objecte original i la seva representació, que pot ser un plànol, un mapa, una maqueta, etc.

L'escala pot estar representada en forma numèrica o gràfica.

Escala numèrica: 1:500

Escala gràfica:



En els dos casos, 1 unitat sobre el plànol representa 500 unitats en la realitat.

EXEMPLE

Calcula les dimensions de les habitacions del pis a què correspon el plànol següent, representat a escala 1:200.

Mesurant amb el regle graduat les diferents habitacions, obtenim:

Menjador:

$2{,}5 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} \rightarrow 500 \text{ cm} \cdot 600 \text{ cm} = 5 \text{ m} \cdot 6 \text{ m}$

Cuina:

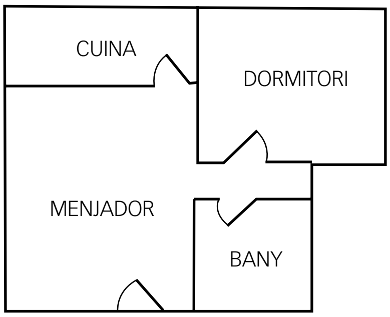
$2{,}5 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm} \rightarrow 500 \text{ cm} \cdot 200 \text{ cm} = 5 \text{ m} \cdot 2 \text{ m}$

Dormitori:

$2{,}5 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} \rightarrow 500 \text{ cm} \cdot 400 \text{ cm} = 5 \text{ m} \cdot 4 \text{ m}$

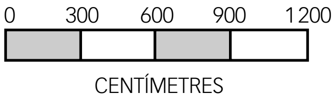
Bany:

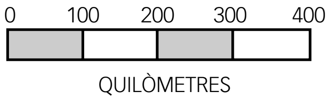
$1{,}5 \text{ cm} \cdot 1{,}5 \text{ cm} \rightarrow 300 \text{ cm} \cdot 300 \text{ cm} = 3 \text{ m} \cdot 3 \text{ m}$

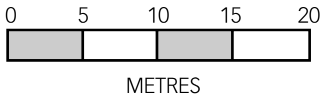


ACTIVITATS

1 Mesura amb el regle i escriu l'escala numèrica corresponent a les escales gràfiques.







2 Dibuixa les escales gràfiques corresponents a les següents escales numèriques.

a) 1:500 b) 1:6000 c) 1:100000

3 En un mapa de carreteres a escala 1:5000000 mesurem la distància que hi ha en línia recta entre dues ciutats, que és de 4,5 cm. Quina distància en quilòmetres hi haurà en la realitat?

Nom: Curs: Data:

ACTIVITATS

1 Volem fer un armari en miniatura, semblant a un altre que té unes mides de 180 × 110 × 45 cm. Si l'alçària de l'armari en miniatura volem que sigui de 13,5 cm, calcula:

a) L'amplada i la profunditat de l'armari en miniatura.

b) La raó de semblança entre els volums dels armaris.

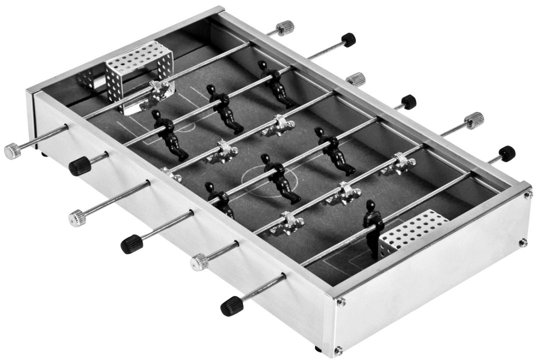
c) La raó de semblança entre les àrees laterals dels dos armaris.

2 Un aficionat al futbol vol construir un futbolí de manera que el recinte de joc sigui semblant al del seu equip favorit, que és un rectangle de 100 × 70 m.

Si la còpia que vol construir vol que tingui una raó de semblança $r = \frac{1}{100}$ respecte de l'original:

a) Quines seran les dimensions del rectangle de joc en el futbolí?

b) I la superfície?

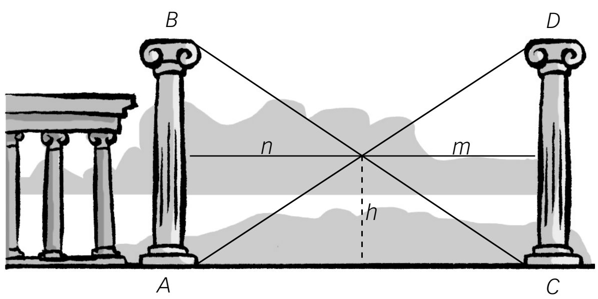


3 Quina és la raó de semblança entre les dimensions de la fotografia original i les ampliacions o reduccions especificades en la taula següent?

Fotografia original	Còpia	Raó de semblança
10 × 15	18 × 27	
12 × 18	9 × 13,5	
15 × 20	8,25 × 11	
12 × 15	14,4 × 18	

4 A l'aigua d'un estany es veu reflectit el parallamps instal·lat al capdamunt del campanar d'una església. Quina alçària té el campanar si l'observador fa 1,80 m i és a 2 m de l'estany, i la distància de l'estany al peu del campanar és de 35 m?

5 Demostra que no influeix la distància de separació de les columnes *AB* i *CD* per calcular l'alçària *h*. Quina mesura té l'alçària?



1 Volem fer un armari en miniatura, semblant a un altre que té unes mides de 180 × 110 × 45 cm. Si l'alçària de l'armari en miniatura volem que sigui de 13,5 cm, calcula:

a) L'amplada i la profunditat de l'armari en miniatura.
b) La raó de semblança entre els volums dels armaris.
c) La raó de semblança entre les àrees laterals dels dos armaris.

a) La raó de semblança de les arestes és:

$$r = \frac{13{,}5}{180} = 0{,}075$$

Amplada = 110 · 0,075 = 8,25 cm
Profunditat = 48 · 0,075 = 3,6 cm

b) La raó de semblança dels volums és:

$$r' = r^3 = (0{,}075)^3 = 0{,}000421875$$

c) La raó de semblança de les àrees laterals és:

$$r'' = r^2 = (0{,}075)^2 = 0{,}005625$$

2 Un aficionat al futbol vol construir un futbolí de manera que el recinte de joc sigui semblant al del seu equip favorit, que és un rectangle de 100 × 70 m.

Si la còpia que vol construir vol que tingui una raó de semblança $r = \frac{1}{100}$ respecte de l'original:

a) Quines seran les dimensions del rectangle de joc en el futbolí?
b) I la superfície?

a) Les dimensions del rectangle de joc en el futbolí són:

$$100 \cdot \frac{1}{100} \times 70 \cdot \frac{1}{100} = 1 \times 0{,}7\,\text{m}$$

b) La superfície original és: $100 \cdot 70 = 7\,000\ \text{m}^2$

La superfície en el futbolí és: $\left(\frac{1}{100}\right)^2 \cdot 7\,000 = 0{,}7\ \text{m}^2$

3 Quina és la raó de semblança entre les dimensions de la fotografia original i les ampliacions o reduccions especificades en la taula següent?

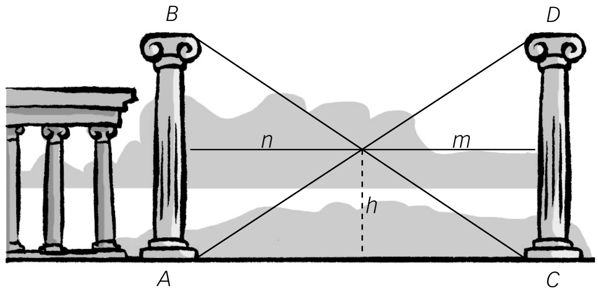
Fotografia original	Còpia	Raó de semblança
10 × 15	18 × 27	$\frac{18}{10} = \frac{27}{15} = 1{,}8$
12 × 18	9 × 13,5	$\frac{9}{12} = \frac{13{,}5}{18} = 0{,}75$
15 × 20	8,25 × 11	$\frac{8{,}25}{15} = \frac{11}{20} = 0{,}55$
12 × 15	14,4 × 18	$\frac{14{,}4}{12} = \frac{18}{15} = 1{,}2$

4 A l'aigua d'un estany es veu reflectit el parallamps instal·lat al capdamunt del campanar d'una església. Quina alçària té el campanar si l'observador fa 1,80 m i és a 2 m de l'estany, i la distància de l'estany al peu del campanar és de 35 m?

$$\frac{1{,}8}{2} = \frac{x}{35} \rightarrow x = \frac{1{,}8 \cdot 35}{2} = 31{,}5$$

L'alçària del campanar és 31,5 m.

5 Demostra que no influeix la distància de separació de les columnes *AB* i *CD* per calcular l'alçària *h*. Quina mesura té l'alçària?



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{n}{m}$$

$$\frac{\overline{AB}}{h} = \frac{m+n}{m} \rightarrow \frac{\overline{AB}}{h} = \frac{m}{m} + \frac{n}{m} \rightarrow \frac{\overline{AB}}{h} = 1 + \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}}$$

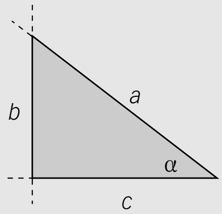
$$\rightarrow \frac{\overline{AB}}{h} = \frac{\overline{CB} + \overline{AB}}{\overline{CB}} \rightarrow h = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{AB} + \overline{CD}}$$

El valor de *h* només depèn de la longitud de *AB* i *CD*.

DISTINGIR LES RAONS TRIGONOMÈTRIQUES

Nom: Curs: Data:

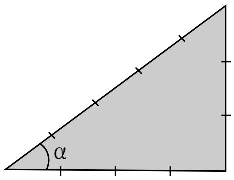
Donat un triangle rectangle, definim les **raons trigonomètriques** d'un dels seus angles aguts α:



sinus	cosinus	tangent
$\sin\alpha = \frac{b}{a}$	$\cos\alpha = \frac{c}{a}$	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{c}$
(catet oposat dividit entre hipotenusa)	(catet contigu dividit entre hipotenusa)	(catet oposat dividit entre catet contigu)

EXEMPLE

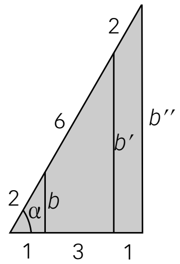
Determina les raons trigonomètriques de l'angle α en el triangle de la figura.



$\sin\alpha = \frac{b}{a} = \frac{3}{5}$ $\cos\alpha = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{c} = \frac{3}{4}$

ACTIVITATS

1 Completa les igualtats i comprova que les raons trigonomètriques són independents de la grandària del triangle escollit.



Aplicant el teorema de Pitàgores a cadascun dels tres triangles de menys a més grandària, calculem b, b' i b'':

$$b = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

$$b' = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = \sqrt{3 \cdot 16} = 4\sqrt{3}$$

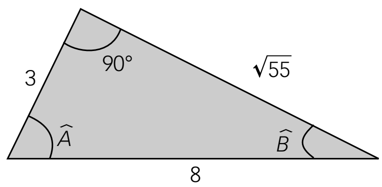
$$b'' = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 25} = 5\sqrt{3}$$

$\sin\alpha = \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin\alpha = \frac{b'}{8} = \frac{4\sqrt{3}}{8} =$ $\sin\alpha = \frac{b''}{10} = \frac{5\sqrt{3}}{10} =$

$\cos\alpha = \frac{c'}{a'} = \underline{\qquad}$ $\cos\alpha = \frac{c'}{a'} = \underline{\qquad} =$ $\cos\alpha = \frac{c''}{a''} = \underline{\qquad} =$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b'}{c'} = \frac{4\sqrt{3}}{4} =$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b''}{c''} = \underline{\qquad} =$

2 Calcula les raons trigonomètriques dels angles $\widehat{A}$ i $\widehat{B}$.



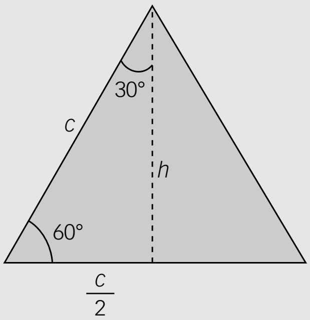
CALCULAR LES RAONS DELS ANGLES DE 30°, 45° I 60°

Nom: Curs: Data:

Las raons trigonomètriques dels angles de 30° i 60° es dedueixen a partir d'un triangle equilàter de costat *c*.

Aplicant-hi el teorema de Pitàgores, en calculem l'altura:

$$h^2 = c^2 - (c/2)^2 = c^2 - c^2/4 = 3c^2/4 \rightarrow h = c \cdot \sqrt{3}/2$$



Las raons trigonomètriques de l'angle de 60° són:

$$sin\ 60° = \frac{c \cdot \sqrt{3}/2}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad cos\ 60° = \frac{c/2}{c} = \frac{1}{2} \qquad ctg\ 60° = \frac{c \cdot \sqrt{3}/2}{c/2} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

ACTIVITATS

1 Dedueix les raons trigonomètriques de l'angle de 30° a partir del triangle equilàter anterior.

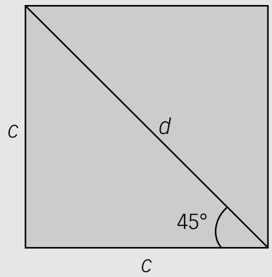
Les raons trigonomètriques de l'angle de 30° són:

$$sin\ 30° = \frac{c/2}{c} = \frac{1}{2};\ cos\ 30° = \frac{c \cdot \sqrt{3}/2}{c} = \_\_\_\_;\ tg\ 30° = \frac{c/2}{c \cdot \sqrt{3}/2} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \_\_\_\_$$

Les raons trigonomètriques de l'angle de 45° es dedueixen a partir d'un quadrat i la seva diagonal.

Aplicant-hi el teorema de Pitàgores, en calculem la diagonal:

$$d^2 = c^2 + c^2 = 2 \cdot c^2 \rightarrow d = c \cdot \sqrt{2}$$



Las raons trigonomètriques de l'angle de 45° són:

$$sin\ 45° = \frac{c}{c \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad cos\ 45° = \frac{c}{c \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad tg\ 45° = \frac{c}{c} = 1$$

2 Completa la taula amb les raons trigonomètriques d'angles notables.

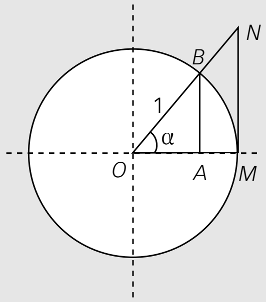
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin	0	—	—	—	1	0	−1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	—	$\frac{1}{2}$	0	−1		1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	no existeix	0	no existeix	0

CALCULAR RAONS TRIGONOMÈTRIQUES D'ANGLES QUALSSEVOL

Nom: Curs: Data:

La circumferència goniomètrica o cercle unitari és una circumferència de radi la unitat.

Sobre aquesta circumferència, el valor del sinus coincideix amb $\overline{AB}$, i el cosinus amb $\overline{OA}$.

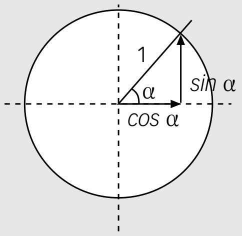


$$\sin\alpha = \frac{AB}{1} = AB \qquad \cos\alpha = \frac{OA}{1} = OA$$

La tangent coincideix amb el segment MN, que és tangent a la circumferència, ja que:

$$tg\,\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{MN}}{1} = \overline{MN}$$

En el primer quadrant:

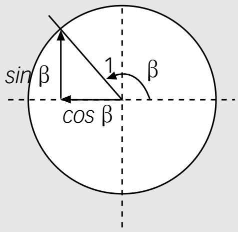


$\sin\alpha > 0$

$\cos\alpha > 0$

$tg\,\alpha > 0$

En el segon quadrant:

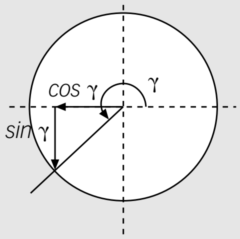


$\sin\beta > 0$

$\cos\beta < 0$

$tg\,\beta < 0$

En el tercer quadrant:

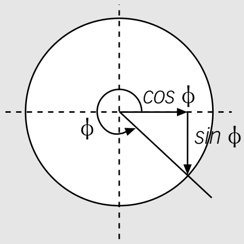


$\sin\gamma < 0$

$\cos\gamma < 0$

$tg\,\gamma > 0$

En el quart quadrant:



$\sin\phi < 0$

$\cos\phi > 0$

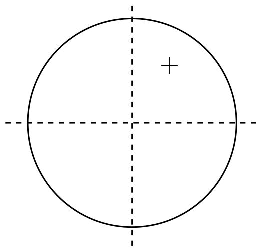
$tg\,\phi < 0$

ACTIVITATS

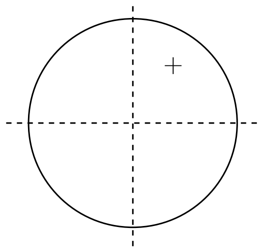
1 Completa la taula següent amb els signes que corresponguin a les raons trigonomètriques indicades.

	40°	70°	110°	210°	300°
sin	+				
cos	+				
tg	+				

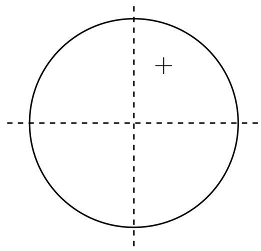
2 Escriu, per a cada quadrant, el signe del sinus, el cosinus i la tangent.



sinus



cosinus

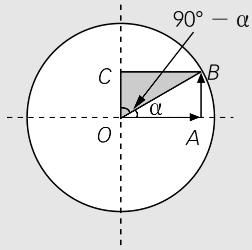


tangent

RELACIONAR LES RAONS D'ANGLES COMPLEMENTARIS I SUPLEMENTARIS

Nom: Curs: Data:

Angles **complementaris** són aquells la suma dels quals val 90°.



El catet oposat a l'angle de 90° − α (*BC*) és igual al catet contigu a α (*OA*): $\boldsymbol{\sin (90° - \alpha) = \cos \alpha}$

El catet contigu a l'angle de 90° − α (*OC*) és igual al catet oposat a α (*AB*): $\boldsymbol{\cos (90° - \alpha) = \sin \alpha}$

$$\mathbf{tg}\ (90° - \alpha) = \frac{\sin\ (90° - \alpha)}{\cos\ (90° - \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{\sin\ \alpha} = \frac{1}{\mathrm{tg}\ \alpha}$$

EXEMPLE

Determina les raons trigonomètriques de l'angle $\alpha = 60°$, sabent que les raons de l'angle de 30° (60° = 90° − 30°) són:

$$\boldsymbol{\sin 30° = \frac{1}{2}} \qquad \boldsymbol{\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad \boldsymbol{\mathrm{tg}\ 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

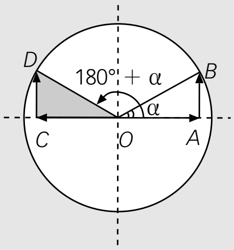
$$\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \sin 30° = \frac{1}{2} \qquad \mathrm{tg}\ 60° = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{tg\ 30°}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1/\sqrt{3}}} = \boldsymbol{\sqrt{3}}$$

ACTIVITATS

1 Calcula les raons trigonomètriques de l'angle de 75°, sabent que les raons de 15° són:

$\sin 15° = 0{,}259$ $\cos 15° = 0{,}966$ $\mathrm{tg}\ 15° = 0{,}268$

Angles **suplementaris** són aquells la suma dels quals val 180°.



El catet oposat a l'angle de 180° − α (*CD*) és igual al catet oposat a α (*AB*): $\boldsymbol{\sin (180° - \alpha) = \sin \alpha}$

El catet contigu a l'angle de 180° − α (*OC*) és el contrari del catet contigu a α (*OA*): $\boldsymbol{\cos (180° - \alpha) = -\cos \alpha}$

$$\mathbf{tg}\ (180° - \alpha) = \frac{\sin\ (180° - \alpha)}{\cos\ (180° - \alpha)} = \frac{\sin\ \alpha}{-\cos\ \alpha} = \boldsymbol{-\mathrm{tg}\ \alpha}$$

EXEMPLE

Calcula les raons trigonomètriques de l'angle $\alpha = 120°$, sabent que les raons de l'angle de 60° (120° = 180° − 60°) són:

$$\boldsymbol{\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad \boldsymbol{\cos 60° = \frac{1}{2}} \qquad \boldsymbol{\mathrm{tg}\ 60° = \sqrt{3}}$$

$$\sin 120° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2} \qquad \mathrm{tg}\ 120° = -\mathrm{tg}\ 60° = -\sqrt{3}$$

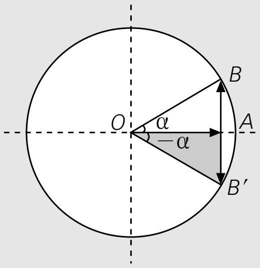
2 Calcula les raons trigonomètriques de l'angle de 155°, sabent que les raons de 25° són:

$\sin 25° = 0{,}423$ $\cos 25° = 0{,}906$ $\mathrm{tg}\ 25° = 0{,}466$

CALCULAR LES RAONS D'ANGLES DE DIFERENTS QUADRANTS

Nom: Curs: Data:

Els **angles oposats** són els que tenen la mateixa mesura, però tenen diferent signe.



El catet oposat a l'angle $-\alpha$ (AB') és el contrari al catet oposat a α (AB): $\mathbf{sin\ (-\alpha) = -sin\ \alpha}$

El catet contigu a l'angle $-\alpha$ (OA) és igual al catet contigu a α (OA): $\mathbf{cos\ (-\alpha) = cos\ \alpha}$

$$tg\ (-\alpha) = \frac{-sin\ \alpha}{cos\ \alpha} = -tg\ \alpha$$

EXEMPLE

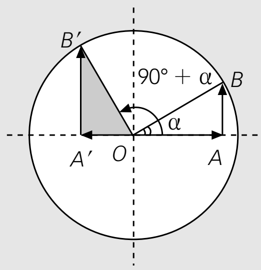
Determina les raons trigonomètriques de l'angle $\alpha = -20°$, sabent que les raons de l'angle de 20° són:

sin 20° = 0,342	**cos 20° = 0,940**	**tg 20° = 0,364**
$sin\ (-20°) = -sin\ 20° = -0{,}342$	$cos\ (-20°) = cos\ 20° = 0{,}940$	$tg\ (-20°) = -tg\ 20° = -0{,}364$

ACTIVITATS

1 Calcula les raons trigonomètriques de l'angle de $-45°$ (busca en la taula de l'objectiu 2 les raons de l'angle de 45°).

ANGLES QUE DIFEREIXEN EN 90°



El catet oposat a l'angle de $90° + \alpha$ ($A'B'$) és el contrari al catet contigu a α (OA):
$\mathbf{sin\ (90° + \alpha) = cos\ \alpha}$

El catet contigu a l'angle de $90° + \alpha$ (OA') és igual al contrari del catet oposat a α (AB):
$\mathbf{cos\ (90° + \alpha) = -sin\ \alpha}$

$$tg\ (90° + \alpha) = \frac{sin\ (90° + \alpha)}{cos\ (90° + \alpha)} = \frac{cos\ \alpha}{-sin\ \alpha} = -\frac{1}{tg\ \alpha}$$

EXEMPLE

Calcula les raons trigonomètriques de l'angle $\alpha = 120°$, coneixent les raons de l'angle de 30°.

$$sin\ 120° = cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\ 120° = -sin\ 30° = -\frac{1}{2} \qquad tg\ 120° = -\frac{1}{tg\ 30°} = -\frac{1}{1/\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

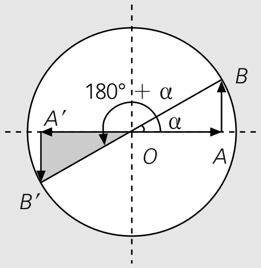
2 Calcula les raons trigonomètriques de l'angle de 100°, sabent que $100° = 90° + 10°$.

$sin\ 10° = 0{,}174$ $\quad cos\ 10° = 0{,}985$ $\quad tg\ 10° = 0{,}176$

CALCULAR LES RAONS D'ANGLES DE DIFERENTS QUADRANTS

Nom: Curs: Data:

ANGLES QUE DIFEREIXEN EN 180º



El catet oposat a l'angle de 180° + α ($A'B'$) és el contrari al catet oposat a α (AB): ***sin* (180° + α) = −*sin* α**

El catet contigu a l'angle de 180° + α (OA') és igual al contrari del catet contigu a α (OA): ***cos* (180° + α) = −*cos* α**

$$\textbf{tg}\ (180° + \alpha) = \frac{\sin\ (180° + \alpha)}{\cos (180° + \alpha)} = \frac{-\sin\ \alpha}{-\cos\ \alpha} = \textbf{tg}\ \alpha$$

EXEMPLE

Calcula les raons trigonomètriques de l'angle α = 240°, coneixent les raons de l'angle de 60°.

$\sin 240° = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 240° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$ $tg\ 240° = tg\ 60° = \sqrt{3}$

3 Calcula les raons trigonomètriques de l'angle de 250°, sabent que:

$\sin 70° = 0{,}940$ $\cos 70° = 0{,}342$ $tg\ 70° = 2{,}747$

Tingues en compte que 250° = 180° + 70°.

RAONS TRIGONOMÈTRIQUES D'ANGLES MÉS GRANS QUE 90º: REDUCCIÓ AL PRIMER QUADRANT

Les raons trigonomètriques de qualsevol angle superior a 90° es poden expressar en funció de les raons d'un altre angle pertanyent al primer quadrant.

1r cas: per a angles del segon quadrant.

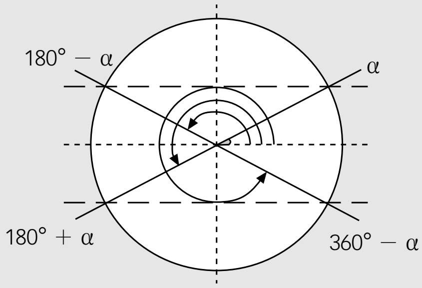
$\beta = 180° - \alpha$

2n cas: per a angles del tercer quadrant.

$\gamma = 180° + \alpha$

3r cas: per a angles del quart quadrant.

$\varepsilon = 360° - \alpha$



4 Calcula les raons trigonomètriques dels angles següents.

a) 135°

Com que 135° pertany al segon quadrant, resulta que 135° = 180° − ....

$\sin 135° = \text{............} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 135° = \text{............} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$tg\ 135° = \text{............} = -1$

b) 210°

Com que 210° és més gran que 180°, pertany al tercer quadrant, ja que 210° = 180° + ...

$\sin 210° = \text{............} = -\frac{1}{2}$

$\cos 210° = \text{............} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$tg\ 210° = \text{............} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

CALCULAR LES RAONS D'ANGLES DE DIFERENTS QUADRANTS

Nom: Curs: Data:

c) 330°

Com que 330° pertany al quart quadrant, resulta que 330° = 360° − 30°.

$sin\ 330° = ... = -\frac{1}{2}$

$cos\ 330° = ... = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$tg\ 330° = ... = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) 420°

A quin quadrant pertany l'angle de 420°? Si fem 420° = 360° + 60°, veiem que està situat en el primer quadrant.

$sin\ 420° = sin\ 60° = ...$

$cos\ 420° = cos\ 60° = ...$

$tg\ 420° = tg\ 60° = ...$

RAONS TRIGONOMÈTRIQUES D'ANGLES MÉS GRANS DE 360°

Si l'angle és més gran de 360°, hem de calcular-ne l'angle equivalent, restant-ne el nombre enter de vegades que conté 360. Les seves raons trigonomètriques són iguals que les de l'angle equivalent resultant.

EXEMPLE

Determina les raons trigonomètriques de l'angle $\alpha = 1470°$.

Dividim 1 470 entre 360:

$1470 = 360 \cdot 4 + 30$ dividend = divisor · quocient + residu

$sin\ 1470° = sin\ 30° = \frac{1}{2}$ $cos\ 1470° = cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $tg\ 1470° = tg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

5 Calcula les raons trigonomètriques dels angles.

a) 840°

Divideix 840 entre 360 i expressa:

$840 = 360 \cdot .... + ...$

$sin\ 840° = sin\ .... = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$cos\ 840° = cos\ .... = ...$

$tg\ 840° = tg\ .... = -\sqrt{3}$

b) 3 915°

Divideix 3 915 entre 360 i expressa:

$3915 = 360 \cdot .... + ...$

$sin\ 3915° = sin\ .... = ...$

$cos\ 3915° = cos\ .... = ...$

$tg\ 3915° = tg\ .... = ...$

c) 1 320°

Divideix 1 320 entre 360 i expressa:

$1320 = 360 \cdot .... + ...$

$sin\ 1320° = sin\ .... = ...$

$cos\ 1320° = cos\ .... = ...$

$tg\ 1320° = tg\ .... = \sqrt{3}$

d) 780°

Divideix 780 entre 360 i expressa:

$780 = 360 \cdot .... + ...$

$sin\ 780° = sin\ .... = ...$

$cos\ 780° = cos\ .... = ...$

$tg\ 780° = tg\ .... = ...$

MANEJAR LES RELACIONS ENTRE LES RAONS D'UN ANGLE

Nom: Curs: Data:

RELACIÓ FONAMENTAL DE LA TRIGONOMETRIA: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Aquesta relació s'obté en aplicar el teorema de Pitàgores en un triangle rectangle juntament amb la relació que es dedueix de la definició de tangent:

$$tg\ \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Coneixent una de les raons trigonomètriques d'un angle, podem calcular les raons restants.

EXEMPLE

Sabent que $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, calcula el sinus i la tangent d'aquest angle.

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} \qquad tg\ \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}$$

ACTIVITATS

1 Sabent que $\sin \alpha = 0{,}78$, calcula $\cos \alpha$ i $tg\ \alpha$.

2 Donat $\cos \alpha = 0{,}32$, calcula $\sin \alpha$ i $tg\ \alpha$.

EXEMPLE

Donat $tg\ \alpha = 2$, calcula $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$.

Denominem $\sin \alpha = x$ i $\cos \alpha = y$. Les relacions entre les raons trigonomètriques són:

$$\frac{x}{y} = 2 \rightarrow x = 2y$$

$$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow (2y)^2 + y^2 = 1 \rightarrow 4y^2 + y^2 = 1 \rightarrow 5y^2 = 1 \rightarrow y = \sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt{0{,}2} = 0{,}447$$

$$x = 2y = 2 \cdot 0{,}447 = 0{,}894 = \sin \alpha$$

$$y = \cos \alpha = 0{,}447$$

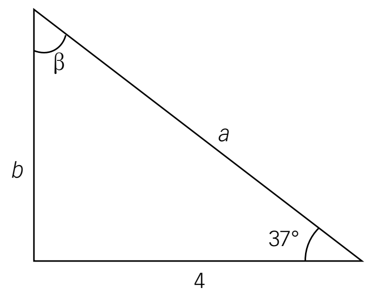
3 Sabent que $tg\ \alpha = 5$, calcula $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$.

APLICAR LES RAONS TRIGONOMÈTRIQUES

Nom: Curs: Data:

EXEMPLE

Calcula les longituds dels costats *a* i *b*, i l'angle β del triangle de la figura.



Com que els tres angles d'un triangle sumen 180°, tenim que:

$180° = 90° + 37° + \beta \rightarrow \beta = 180° - 127° = 53°$

Per calcular l'altre catet, *b*, apliquem la definició de *tg* 37° i utilitzem la calculadora per calcular *tg* 37°:

$tg\ 37° = \dfrac{b}{4} \rightarrow b = 4 \cdot 0{,}75 = 3$

Per calcular la hipotenusa *a* podem fer servir tres mètodes:

1r Aplicar el teorema de Pitàgores.

2n Utilitzar la definició de *sin* 37°.

3r Fer servir la definició de *cos* 37°.

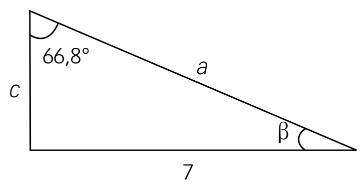
Farem servir el segon mètode:

$sin\ 37° = \dfrac{3}{a} \rightarrow a = \dfrac{3}{0{,}6} = 5$

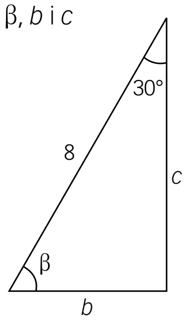
ACTIVITATS

1 Calcula, en cada triangle, els costats i els angles que s'indiquen.

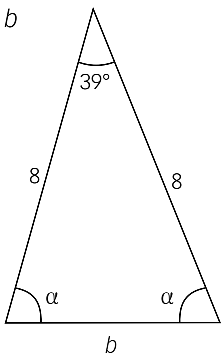
a) β, *a* i *c*



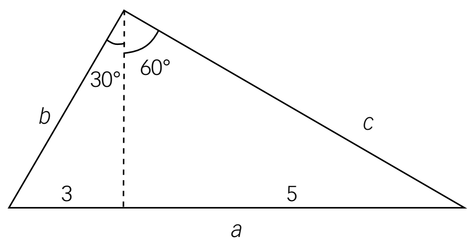
c) β, *b* i *c*



b) α i *b*

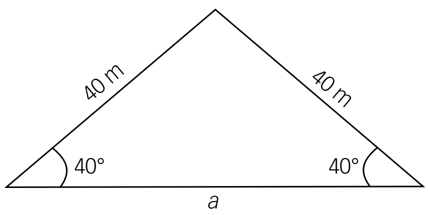


d) *a*, *b* i *c*



2 Calcula l'àrea del triangle següent.

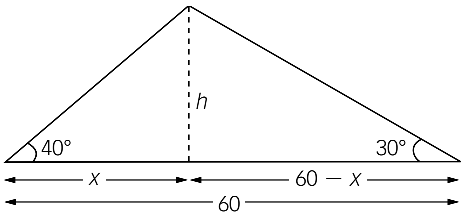
Tracem l'altura i, fixant-nos en un dels dos triangles que es formen, calculem *h* i la meitat de la base, $\dfrac{a}{2}$.



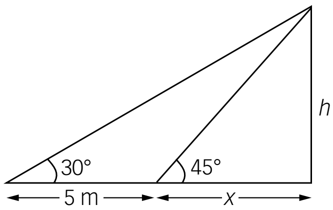
APLICAR LES RAONS TRIGONOMÈTRIQUES

Nom: Curs: Data:

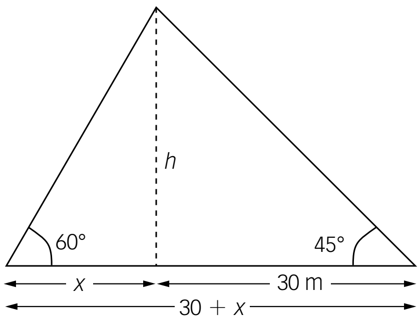
3 Calcula l'altura *h* i les distàncies *x* i 60 − *x* de la figura. Utilitza les tangents dels angles de 40° i 30°.



4 Calcula els valors de *h* i *x*.



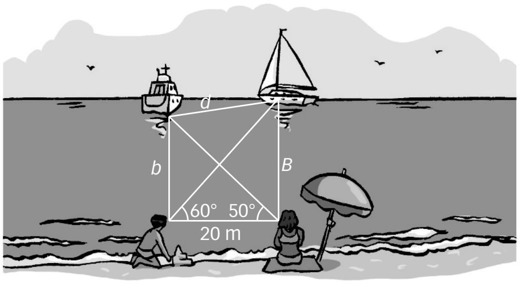
5 Determina l'alçària de l'arbre que, vist des de dues posicions, distants 30 m entre si, forma la figura següent.



Nom: Curs: Data:

ACTIVITATS

1 Des de la platja es veuen dos vaixells. Calcula la distància que hi ha entre ells amb els angles que s'indiquen.

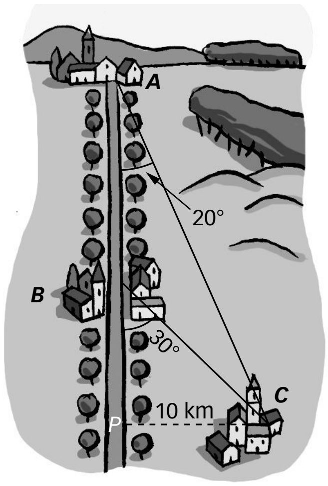


2 Des del cim d'una muntanya, a una altitud de 1 114 m, veiem un poblet i una granja situades en una vall que és a una altitud de 537 m sobre el nivell del mar. Si observem el poble amb un angle de 68° i la granja amb un de 83°:

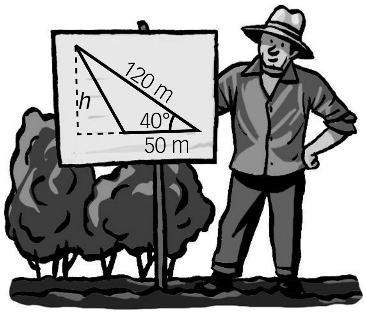
a) Quin dels dos llocs és més a prop de la muntanya?

b) Si la muntanya, el poble i la granja es troben alineats, calcula la distància que hi ha entre el poble i la granja.

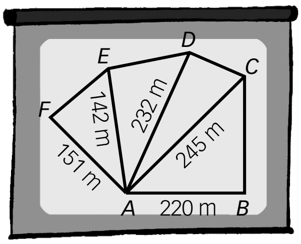
3 Dues poblacions, *A* i *B*, estan situades en una carretera que va de nord a sud. Una altra població, *C*, a 10 quilòmetres en línia recta de la carretera anterior, està situada a 20° al sud-est de *A* i a 30° al sud-est de *B*. Quina distància separa la població *A* de *B*?



4 Quant s'obtindrà per vendre aquesta parcel·la si es paga a 300 €/m^2?



5 Calcula la superfície d'aquest terreny.



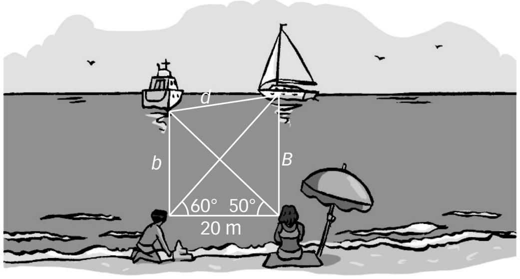
$\widehat{BAC} = 33° \, 45'$

$\widehat{CAD} = 24° \, 13'$

$\widehat{DAE} = 42° \, 15'$

$\widehat{EAF} = 33° \, 41'$

1 Des de la platja es veuen dos vaixells. Calcula la distància que hi ha entre ells amb els angles que s'indiquen.



$tg\ 50° = \dfrac{b}{20} \rightarrow b = 20tg\ 50° = 23{,}84$ m

$tg\ 60° = \dfrac{B}{20} \rightarrow B = 20tg\ 60° = 20\sqrt{3} = 34{,}64$ m

$d^2 = 20^2 + (34{,}64 - 23{,}84)^2 = 516{,}64 \rightarrow d = \sqrt{516{,}64} = 22{,}73$ m

Per tant, els dos vaixells disten 22,73 m.

2 Des del cim d'una muntanya, a una altitud de 1 114 m, veiem un poblet i una granja situades en una vall que és a una altitud de 537 m sobre el nivell del mar. Si observem el poble amb un angle de 68° i la granja amb un de 83°:

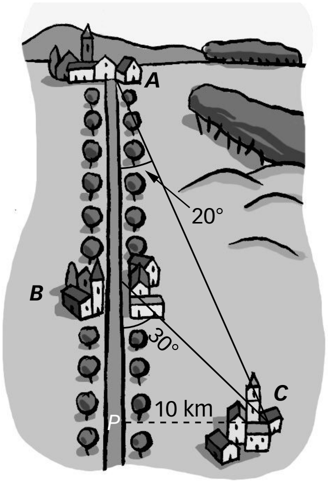
a) Quin dels dos llocs és més a prop de la muntanya?

b) Si la muntanya, el poble i la granja es troben alineats, calcula la distància que hi ha entre el poble i la granja.

a) És més a prop el lloc que s'observa amb menor grau, és a dir, el poble.
La distància al poble és: $(1\,114 - 537) \cdot tg\ 68° = 1\,428{,}13$ m

b) La distància a la granja és: $(1\,114 - 537) \cdot tg\ 83° = 4\,699{,}29$ m
La distància entre el poble i la granja és: $4\,699{,}29 - 1\,428{,}13 = 3\,271{,}16$ m

3 Dues poblacions, *A* i *B*, estan situades en una carretera que va de nord a sud. Una altra població, *C*, a 10 quilòmetres en línia recta de la carretera anterior, està situada a 20° al sud-est de *A* i a 30° al sud-est de *B*. Quina distància separa la població *A* de *B*?

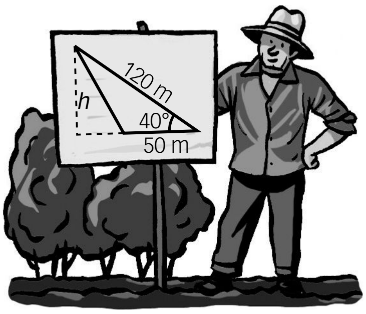


$\overline{AP} = \dfrac{10}{tg\ 20°} = 27{,}47$ km

$\overline{BP} = \dfrac{10}{tg\ 30°} = 17{,}32$ km

$\overline{AB} = \overline{AP} - \overline{BP} = 10{,}15$ km

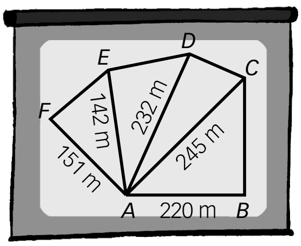
4 Quant s'obtindrà per vendre aquesta parcel·la si es paga a 300 €/m²?



$A = \dfrac{120 \cdot (50\,sin\ 40°)}{2} = 1928{,}36\ m^2$

Preu $= 1928{,}36 \cdot 300 = 578\,508$ €

5 Calcula la superfície d'aquest terreny.



$\widehat{BAC} = 33°\ 45'$

$\widehat{CAD} = 24°\ 13'$

$\widehat{DAE} = 42°\ 15'$

$\widehat{EAF} = 33°\ 41'$

$$\left.\begin{array}{l} A_{BAC} = \dfrac{220 \cdot 245 \cdot sin\ 33°\ 45'}{2} = 14\,972{,}62\ m^2 \\ A_{CAD} = \dfrac{232 \cdot 245 \cdot sin\ 24°\ 13'}{2} = 11\,657{,}55\ m^2 \\ A_{DAE} = \dfrac{142 \cdot 232 \cdot sin\ 42°\ 15'}{2} = 11\,698{,}17\ m^2 \\ A_{EAF} = \dfrac{151 \cdot 142 \cdot sin\ 33°\ 41'}{2} = 5\,945{,}9\ m^2 \end{array}\right\} \rightarrow A = 44\,274{,}24\ m^2$$

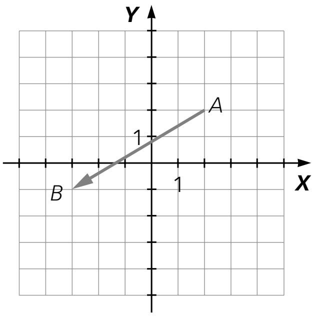
IDENTIFICAR ELS ELEMENTS D'UN VECTOR

Nom: Curs: Data:

- **Vector:** segment orientat $\overrightarrow{AB}$ determinat per dos punts: $A\ (a_1, a_2)$, origen del vector, i $B\ (b_1, b_2)$, extrem del vector.
- **Coordenades** del vector: $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$
- **Mòdul:** $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

EXEMPLE

Calcula les coordenades i el mòdul del vector següent.



Origen: $A\ (2, 2)$

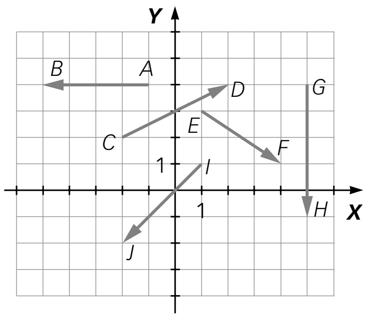
Extrem: $B\ (-3, -1)$

Coordenades: $\overrightarrow{AB} = (-3 - 2, -1 - 2) = (-5, -3)$

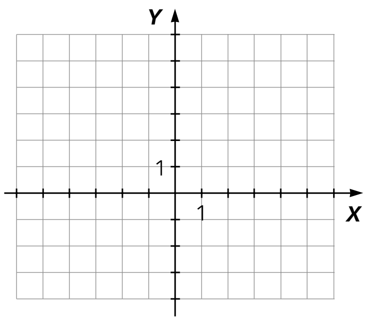
Mòdul: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$

ACTIVITATS

1 Quines són les coordenades i el mòdul dels vectors següents?



2 Donats els punts $A\,(3, 6)$, $B\,(-3, 0)$, $C\,(0, -5)$ i $D\,(-2, 7)$, representa i calcula les coordenades i el mòdul dels vectors $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{DA}$.

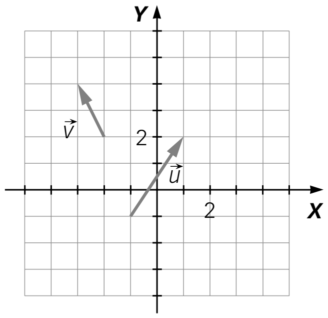


FER OPERACIONS AMB VECTORS

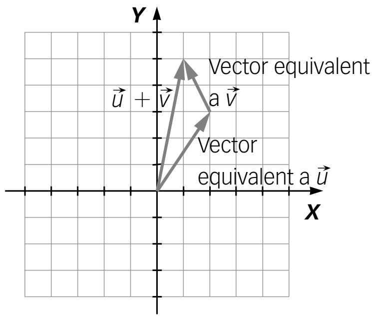
Nom: Curs: Data:

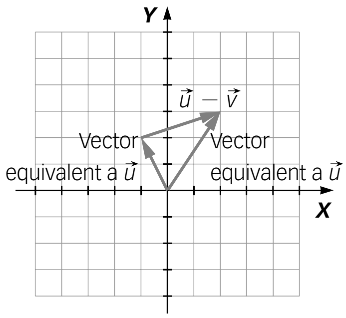
- Per **sumar** gràficament dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ en prenem un, $\vec{u}$, i amb origen al seu extrem dibuixem un vector equivalent a $\vec{v}$. La suma $\vec{u} + \vec{v}$ és un altre vector que té com a origen l'origen de $\vec{u}$, i com a extrem, l'extrem de $\vec{v}$.
- En coordenades, si les coordenades de $\vec{u}$ són (u_1, u_2) i les coordenades de $\vec{v}$ són (v_1, v_2), el **vector suma** és:
  $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$
- Per **restar** gràficament dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ prenem vectors equivalents als dos que tinguin el mateix origen, i la diferència és un altre vector que té com a origen l'extrem de $\vec{v}$, i com a extrem, l'extrem de $\vec{u}$.
- En coordenades, si les coordenades de $\vec{u}$ són (u_1, u_2) i les coordenades de $\vec{v}$ són (v_1, v_2), el **vector diferència** és:
  $\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$

EXEMPLE



Donats els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ de la figura, calcula gràficament i per coordenades els vectors $\vec{u} + \vec{v}$ i $\vec{u} - \vec{v}$.





$\vec{u} = (1 - (-1), 2 - (-1)) = (2, 3)$

$\vec{v} = (-3 - (-2), 4 - 2) = (-1, 2)$

$\vec{u} + \vec{v} = (2 + (-1), 3 + 2) = (1, 5)$

$\vec{u} - \vec{v} = (2 - (-1), 3 - 2) = (3, 1)$

ACTIVITATS

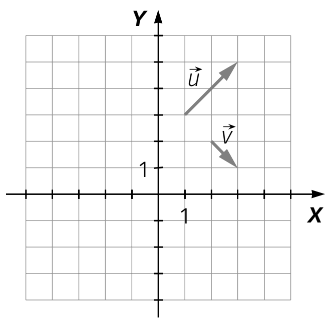
1 Les coordenades dels punts A, B, C i D són:

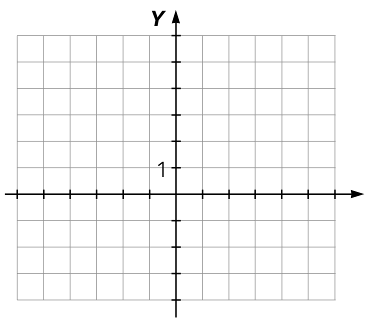
$A(-1, 3)$ $B(0, 6)$ $C(4, -7)$ $D(-4, 0)$

Calcula el resultat d'aquestes operacions.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$ c) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB}$ d) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}$ e) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD}$ f) $-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$

2 Calcula gràficament el vector suma $\vec{u} + \vec{v}$ i el vector diferència $\vec{u} - \vec{v}$.





FER OPERACIONS AMB VECTORS

Nom: Curs: Data:

- Per **multiplicar un vector $\vec{u}$ per un nombre** real k multipliquem el mòdul del vector pel nombre real i mantenim la direcció del vector. El sentit serà el mateix si k és positiu, i contrari si k és negatiu.
- En coordenades, si $\vec{u} = (u_1, u_2)$, el **producte d'un nombre real** k per un vector $\vec{u}$ es calcula multiplicant cada coordenada pel nombre k.

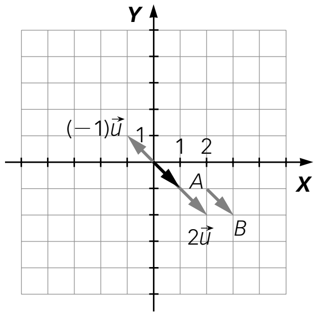
EXEMPLE

Donat el vector $\vec{u}$, d'origen $A(2, -1)$ i extrem $B(3, -2)$, calcula gràficament i analíticament el producte de $\vec{u}$ pels nombres 2 i -1.

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (3 - 2, -2 - (-1)) = (1, -1)$

$2\vec{u} = 2 \cdot (1, -1) = (2, -2)$

$(-1)\vec{u} = (-1) \cdot (1, -1) = (-1, 1)$



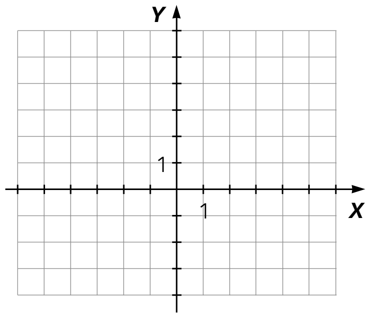
3 Sabent que $A(-3, 3)$ i $B(-1, 5)$, calcula gràficament i analíticament $k \cdot \overrightarrow{AB}$.

a) $k = 2$

b) $k = -4$

c) $k = \frac{1}{2}$

d) $k = 3$



- La suma d'un punt A més un vector $\vec{u}$ és un altre punt B que resulta de traslladar el punt A segons el vector $\vec{u}$.
- En coordenades, si $A(a_1, a_2)$ i $\vec{u} = (u_1, u_2)$, la seva suma és el punt $B(b_1, b_2) = (a_1 + u_1, a_2 + u_2)$.

EXEMPLE

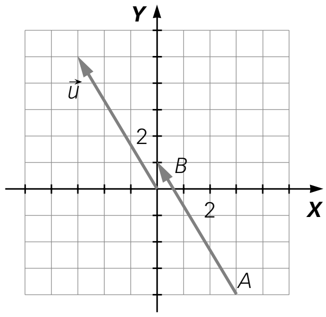
Resol els apartats.

a) Si $A(3, -4)$ i el vector $\vec{u} = (-3, 5)$, calcula les coordenades del punt $B = A + \vec{u}$, i representa el resultat gràficament.

b) Si $A'(-3, 0)$ és el traslladat de A pel vector $\vec{v}$, quines són les coordenades de $\vec{v}$?

a) $B = A + \vec{u} = (3, -4) + (-3, 5) = (3 + (-3), -4 + 5) = (0, 1)$

b) $A' = A + \vec{v} \rightarrow (-3, 0) = (3 + v_1, -4 + v_2) \rightarrow v_1 = -6$ i $v_2 = 4$



4 Si traslladem el punt A pel vector $\vec{u}$ per obtenir el punt B, calcula els valors x i y. Representa els punts traslladats.

a) $A(0, -5)$ $\vec{u}(x, y) \rightarrow B(5, 0)$

b) $A(-3, x)$ $\vec{u}(4, 3) \rightarrow B(y, 2)$

EXPRESSAR LES RECTES MITJANÇANT LES SEVES EQUACIONS

Nom: Curs: Data:

- Si $A(a, b)$ és un punt de la recta, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ és un vector de la recta i t és un nombre real, qualsevol punt $P(x, y)$ de la recta es pot obtenir amb l'**equació vectorial**:

$$(x, y) = (a, b) + t \cdot (v_1, v_2)$$

- El vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$ es diu **vector director** de la recta.
- Les **equacions paramètriques** de la recta són: $\left.\begin{aligned} x &= a + t \cdot v_1 \\ y &= b + t \cdot v_2 \end{aligned}\right\}$

EXEMPLE

Donats els punts $A(-2, 5)$ i $B(-1, 1)$ d'una recta:

a) Calcula'n l'equació vectorial i les equacions paramètriques.

b) Estudia si el punt $C(-1, 9)$ pertany a la recta.

Com que la recta passa pels punts A i B, podem prendre com a vector director de la recta $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (-1 - (-2), 1 - 5) = (1, -4)$.

a) Les equacions demanades són:

- Equació vectorial: $(x, y) = (-2, 5) + t \cdot (1, -4)$
- Equacions paramètriques: $\left.\begin{aligned} x &= -2 + t \\ y &= 5 - 4t \end{aligned}\right\}$

b) En les equacions paramètriques substituïm les coordenades del punt C per x i y: $\left.\begin{aligned} -1 &= -2 + t \\ 9 &= 5 - 4t \end{aligned}\right\}$.

Aïllem t en les dues equacions: $\left\{\begin{aligned} t &= -1 + 2 = 1 \\ t &= \frac{9 - 5}{-4} = 1 \end{aligned}\right.$. Com que en els dos casos s'obté el mateix valor, es determina que $C(-1, 9)$ pertany a la recta.

ACTIVITATS

1 Donada la següent equació vectorial d'una recta: $(x, y) = (4, 8) + t \cdot (-3, 5)$, indica un punt d'aquesta recta i el seu vector director.

2 Escriu l'equació vectorial i les equacions paramètriques de la recta que passa pels punts $A(-5, 2)$ i $B(0, 1)$.

3 Estudia si els punts $A(7, 4)$, $B(1, 2)$ i $C(0, 0)$ pertanyen o no a la recta: $\left.\begin{aligned} x &= 3 + 2t \\ y &= 2t \end{aligned}\right\}$

EXPRESSAR LES RECTES MITJANÇANT LES SEVES EQUACIONS

Nom: Curs: Data:

Si $A(a, b)$ és un punt concret de la recta, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ és el seu vector director i $P(x, y)$ és un punt genèric, tenim les següents equacions de la recta.

- **Equació contínua:** $\boldsymbol{\dfrac{x-a}{v_1} = \dfrac{y-b}{v_2}}$
- **Equació punt-pendent:** $\boldsymbol{y - b = m(x - a)}$
- **Equació explícita:** $\boldsymbol{y = mx + n}$
- $m = \dfrac{v_1}{v_2}$ és el **pendent de la recta** i $n = b - \dfrac{v_1}{v_2}a$ és l'**ordenada en l'origen**.

EXEMPLE

Donada la recta expressada en forma vectorial: $(x, y) = (2, 1) + t \cdot (4, 3)$

a) Calcula les seves equacions en forma contínua, punt-pendent i explícita.

b) Indica el seu pendent i la seva ordenada en l'origen.

a) Un punt de la recta és $A(2, 1)$, el seu vector director és $\vec{v} = (4, 3)$ i l'equació contínua és: $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{3}$.

Multiplicant en creu, tenim que $4(y - 1) = 3(x - 2)$, i obtenim l'equació punt-pendent de la recta: $y - 1 = \dfrac{3}{4}(x - 2)$

Finalment aïllant y, i operant, obtenim l'equació explícita de la recta:

$$y - 1 = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$$

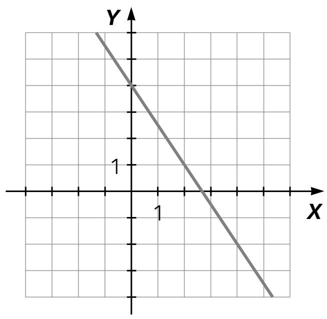
b) El pendent és $m = \dfrac{3}{4}$ i l'ordenada en l'origen és $n = -\dfrac{1}{2}$.

4 Donada la recta de la gràfica, es demana:

a) Les coordenades de dos dels seus punts.

b) El vector director.

c) La seva equació contínua.



5 Expressa l'equació que passa pel punt $A(1, -2)$ i que té per vector director $\vec{v} = (-1, 1)$ mitjançant les seves equacions:

a) Punt-pendent.

b) Explícita.

EXPRESSAR LES RECTES MITJANÇANT LES SEVES EQUACIONS

Nom: Curs: Data:

L'**equació general o implícita** de la recta és de la forma:

$$Ax + By + C = 0$$

on A, B i C són nombres reals.

El vector director de la recta és $\vec{v} = (B, -A)$.

El pendent de la recta és $m = \frac{-A}{B}$.

L'ordenada en l'origen o punt de tall amb l'eix Y és $n = \frac{-C}{B}$.

EXEMPLE

Resol els apartats.

a) Dóna l'equació general de la recta que passa pels punts $P(1, -2)$ i $Q(0, 3)$.

b) Calcula'n el pendent i l'ordenada en l'origen.

a) Trobem el vector director: $\overrightarrow{PQ} = (0 - 1, 3 - (-2)) = (-1, 5) = (B, -A)$

Per tant, $-5x - y + C = 0$

Per calcular el valor de C substituïm un dels punts donats; per exemple, $Q(0, 3)$, i aïllem C: $-5 \cdot 0 - 3 + C = 0 \rightarrow C = 3$

L'equació general o implícita de la recta és: $-5x - y + 3 = 0$

b) El pendent és $m = \frac{5}{-1} = -5$ i l'ordenada en l'origen és $n = \frac{-3}{-1} = 3$.

6 Calcula l'equació general de la recta que passa pels punts $A(2, 2)$ i $B(-2, 3)$.

7 A partir de l'equació $2x - 3y + 2 = 0$ d'una recta, calcula'n el vector director, el pendent i l'ordenada en l'origen.

8 Quina és l'equació general o implícita de la recta l'equació explícita de la qual és $y = 3x + 4$?

9 Donada l'equació $-2x + y - 8 = 0$ d'una recta, escriu la seva equació punt-pendent.

ESTUDIAR LES POSICIONS RELATIVES DE DUES RECTES

Nom: Curs: Data:

Posicions	Vectors directors	Pendents	Equació general
Paral·leles (igual direcció i sense punts comuns)	Proporcionals $\frac{\vec{v_2}}{\vec{v_1}} = \frac{\vec{u_2}}{\vec{u_1}}$	Iguals $m = m'$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$
Coincidents (igual direcció i tots els punts comuns)	Proporcionals $\frac{\vec{v_2}}{\vec{v_1}} = \frac{\vec{u_2}}{\vec{u_1}}$	Iguals $m = m'$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$
Secants (distinta direcció i un punt en comú)	No proporcionals $\frac{\vec{v_2}}{\vec{v_1}} \neq \frac{\vec{u_2}}{\vec{u_1}}$	Diferents $m \neq m'$	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$

EXEMPLE

Estudia la posició relativa dels següents parells de rectes.

a) $r: \frac{x+2}{3} = \frac{y}{1}$
$s: x - 3y - 12 = 0$

b) $r: y = 5x - 2$
$s: (x, y) = (2, -1) + t(-2, 1)$

a) El vector director de r és (3, 1) i el vector director de s és $(-3, -1)$. Els vectors directors són proporcionals: $\frac{1}{3} = \frac{-1}{-3}$

Per veure si les rectes són paral·leles o coincidents prenem el punt $(-2, 0)$ de r i el substituïm en s per veure si compleix o no la seva equació: $-2 - 3 \cdot 0 - 12 \neq 0$, i es dedueix que no pertany a s.
Les rectes r i s són paral·leles.

b) El pendent de r és $m = 5$ i el vector director de s és $\vec{v} = (-2, 1)$, de manera que el pendent de s és $m' = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \neq 5$. Les rectes r i s són secants.

ACTIVITATS

1 Escriu l'equació d'una recta paral·lela a la recta $r: y = -x + 5$ que passi pel punt (0, 0) de totes les formes indicades.

a) Vectorial   b) Punt-pendent   c) General

2 Escriu l'equació d'una recta secant a la recta $r: y = -x + 5$ que passi pel punt (0, 0) de totes les formes indicades.

a) Vectorial   b) Punt-pendent   c) General

ESTUDIAR LES POSICIONS RELATIVES DE DUES RECTES

Nom: Curs: Data:

3 Estudia la posició relativa dels següents parells de rectes.

a) $r: \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y-1}{-2}$
$s: x + 2y - 1 = 0$

b) $r: y = 2x - 1$
$s: y - 3 = -(x + 2)$

c) $r: -3x - 3y + 3 = 0$
$s: x + y + 2 = 0$

Donada la recta que passa per un punt $A(a, b)$, el vector director de la qual és $\vec{v} = (v_1, v_2)$, si una de les dues coordenades és zero, la recta és paral·lela a un dels eixos de coordenades.

- Si $v_1 \neq 0$ i $v_2 = 0$, l'equació de la recta és $y = b$. És una recta paral·lela a l'eix X.
- Si $v_1 = 0$ i $v_2 \neq 0$, l'equació de la recta és $x = a$. És una recta paral·lela a l'eix Y.

Les rectes paral·leles als eixos no es poden expressar mitjançant una equació en forma contínua, ja que una de les coordenades del seu vector director és zero.

EXEMPLE

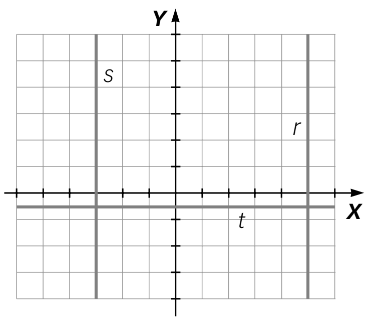
Expressa la recta que passa pel punt *A* (0, 3) i *B* (4, 3) mitjançant les seves equacions:

a) Vectorial **b) General**

a) El seu vector director és $\overrightarrow{AB} = (4 - 0, 3 - 3) = (4, 0)$, i passa per qualsevol dels punts donats, per exemple, per A. L'equació vectorial és: $(x, y) = (0, 3) + t \cdot (4, 0)$

b) Atès que els dos punts donats tenen com a segona coordenada 3, l'equació general és: $y = 3$.

4 Escriu les equacions generals i paramètriques de les rectes següents.



5 Expressa, mitjançant les equacions vectorial i explícita, les rectes següents.

a) Paral·lela a l'eix Y i que passa pel punt $A\left(-\dfrac{3}{2}, 0\right)$.

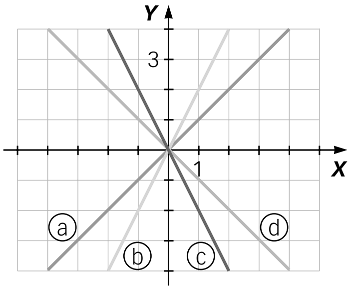
b) Paral·lela a l'eix X i que passa pel punt $B(0, 7)$.

Nom: Curs: Data:

ACTIVITATS

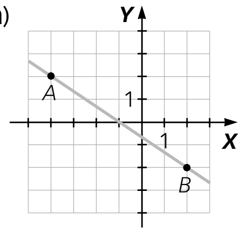
1 Les rectes que no tenen terme independent en la seva forma general compleixen la propietat segons la qual passen totes per l'origen de coordenades.

Calcula les equacions explícita i implícita d'aquestes rectes, i comprova que es compleix la propietat.

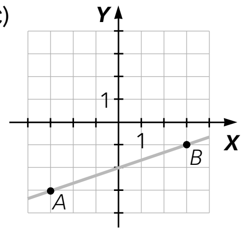


2 Determina l'equació general i l'equació punt-pendent de les rectes següents.

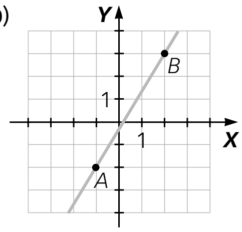
a)



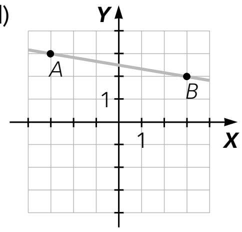
c)



b)



d)

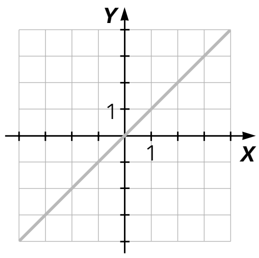


3 Aquesta és la gràfica que representa la recta bisectriu del primer i tercer quadrants.

a) Calcula les seves equacions paramètriques.

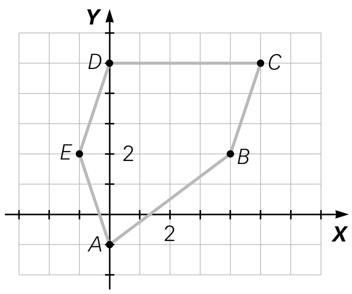
b) Determina l'equació de la recta paral·lela a la bisectriu i que passa pel punt $P(-2, 2)$.

c) Expressa les equacions de les dues en totes les formes possibles.



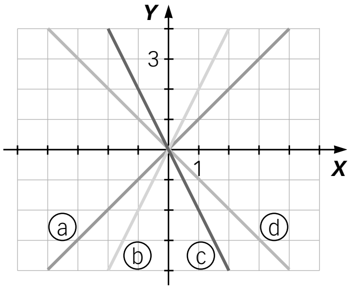
4 Calcula la suma dels vectors que formen els costats *AB*, *BC*, *CD*, *DE* i *EA* del polígon següent.

Passa el mateix en tots els polígons?



1 Les rectes que no tenen terme independent en la seva forma general compleixen la propietat segons la qual passen totes per l'origen de coordenades.

Calcula les equacions explícita i implícita d'aquestes rectes, i comprova que es compleix la propietat.



a) $y = x \rightarrow x - y = 0$

b) $y = 2x \rightarrow 2x - y = 0$

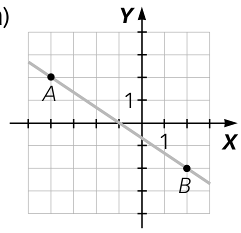
c) $y = -2x \rightarrow -2x - y = 0 \rightarrow 2x + y = 0$

d) $y = -x \rightarrow -x - y = 0 \rightarrow x + y = 0$

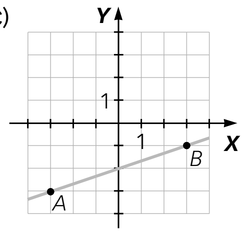
No hi ha terme independent i el punt (0, 0) pertany a totes les rectes.

2 Determina l'equació general i l'equació punt-pendent de les rectes següents.

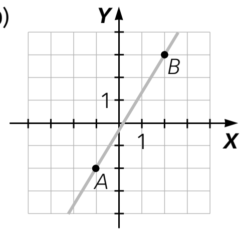
a)



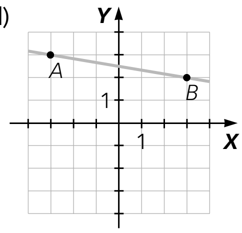
c)



b)



d)



a) Passa pel punt $A(-4, 2)$ i el vector director és $\overrightarrow{AB} = (6, -4)$.

$m = \dfrac{-4}{6} = \dfrac{-2}{3}$

L'equació punt-pendent és: $y - 2 = -\dfrac{2}{3}(x + 4)$

L'equació general és: $2x + 3y + 2 = 0$

b) Passa pel punt $A(-1, -2)$ i el vector director és $\overrightarrow{AB} = (3, 5)$.

$m = \dfrac{5}{3}$

L'equació punt-pendent és: $y + 2 = \dfrac{5}{3}(x + 1)$

L'equació general és: $5x - 3y - 1 = 0$

c) Passa pel punt $A(-3, -3)$ i el vector director és $\overrightarrow{AB} = (6, 2)$.

$m = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

L'equació punt-pendent és: $y + 3 = \dfrac{1}{3}(x + 3)$

L'equació general és: $x - 3y - 6 = 0$

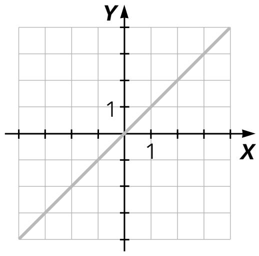
d) Passa pel punt $A(-3, 3)$ i el vector director és $\overrightarrow{AB} = (6, -1)$.

$m = \dfrac{-1}{6}$

L'equació punt-pendent és: $y - 3 = \dfrac{1}{6}(x + 3)$

L'equació general és: $x + 6y - 15 = 0$

3 Aquesta és la gràfica que representa la recta bisectriu del primer i tercer quadrants.



a) Calcula les seves equacions paramètriques.

b) Determina l'equació de la recta paral·lela a la bisectriu i que passa pel punt $P(-2, 2)$.

c) Expressa les equacions de les dues en totes les formes possibles.

a) Passa pel punt (0, 0).

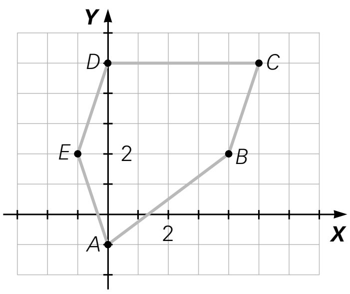
Té per vector director (1, 1).

$\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = t \end{array}\right\}$

b) En forma paramètrica, la recta és: $\left.\begin{array}{l} x = -2 + t \\ y = 2 + t \end{array}\right\}$

c) Bisectriu	Paral·lela pel punt (−2, 2)
$\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1}$	$\dfrac{x + 2}{1} = \dfrac{y - 2}{1}$
$\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = t \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{l} x = -2 + t \\ y = 2 + t \end{array}\right\}$
$y = x$	$y - 2 = x + 2$
$x - y = 0$	$x - y + 4 = 0$
$y = x$	$y = x + 4$

4 Calcula la suma dels vectors que formen els costats *AB*, *BC*, *CD*, *DE* i *EA* del polígon següent.



Passa el mateix en tots els polígons?

La suma dels vectors és el vector zero, (0, 0). Això passa en tots els polígons tancats.

CONÈIXER LES EXPRESSIONS D'UNA FUNCIÓ

Nom: Curs: Data:

La relació entre dues variables es pot expressar de diferents maneres:

- **Amb un text:** descripció verbal i/o escrita que expressa la relació entre dues variables.
- **Amb taules:** els valors de la variable independent i els seus valors associats per a la variable dependent s'organitzen en forma de taula.
- **Amb gràfics:** ens donen una visió qualitativa de la relació que hi ha entre les variables. Pot ser una representació en uns eixos de coordenades.
- **Amb una fórmula o expressió algebraica:** amb aquesta podem calcular quin valor de la variable dependent correspon a un valor de la variable independent, i viceversa.

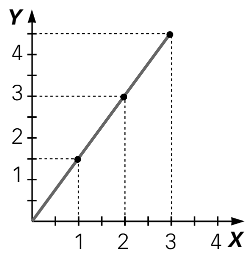
EXEMPLE

El preu de les taronges és 1,50 €/kg. Ho expressarem de les maneres que acabem d'explicar.

- **Amb un text:** l'import que es paga és el producte d'1,50 € pel nombre de quilograms adquirits.
- **Amb una taula:** el nombre de quilograms és la variable independent i l'import és la variable dependent.

Quilograms de taronges	1	2	3	…
Import (€)	1,50	3	4,50	…

- **Amb un gràfic:** representem la situació a través de punts en un sistema d'eixos de coordenades.



- **Amb una fórmula:** si denominem P l'import en euros i n el nombre de quilos de taronges, la fórmula és: $P = 1{,}5n$

ACTIVITATS

1 En un aparcament veiem la següent tarifa de preus. Determina la taula, el gràfic i la fórmula que expressen la relació entre el temps (nombre d'hores) que està el cotxe a l'aparcament i els diners que s'abonen.

TARIFES

1a hora o fracció .... 2 €

Cada hora addicional o fracció .... 1,50 €

Màxim: 10 € per 24 hores

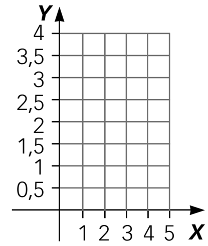
CONÈIXER LES EXPRESSIONS D'UNA FUNCIÓ

Nom: Curs: Data:

La **gràfica** d'una funció és la representació del conjunt de punts que defineixen aquesta funció.

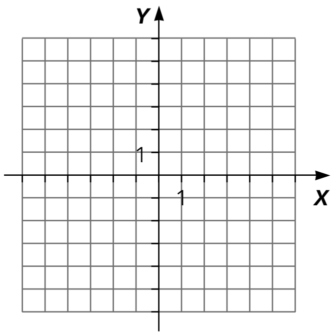
2 La taula expressa la relació entre els litres de llet adquirits i el seu preu. Determina la gràfica i la fórmula que representa la relació entre les dues magnituds.

Litres de llet	Preu
1	0,75
2	1,50
3	2,25
4	3



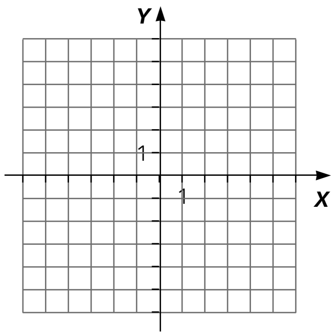
3 Donada la funció a través de la fórmula $y = 3x - 1$, determina'n la taula de valors i la gràfica.

x	$y = f(x)$
0	
1	
−1	
2	
−2	



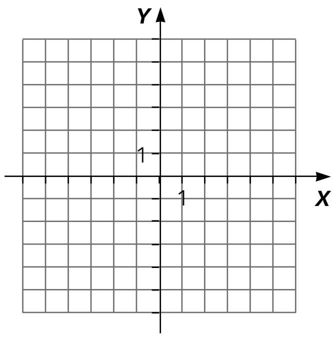
4 Donada la funció a través de la fórmula $y = x^2 - 1$, calcula'n la taula de valors i la gràfica.

x	$y = f(x)$
0	
1	
−1	
2	
−2	



5 Donada la funció a través de la fórmula $y = x^3 + 1$, determina'n la taula de valors i la gràfica.

x	$y = f(x)$
0	
1	
−1	
2	
−2	



CALCULAR EL DOMINI I EL RECORREGUT D'UNA FUNCIÓ

Nom: Curs: Data:

Una **funció** $y = f(x)$ és una relació entre dues magnituds o variables, tal que a cada valor de la variable independent x se li associa, com a màxim, un únic valor de la variable dependent y.

Per indicar que a cada valor de x se li associa un únic valor de y, s'escriu: $x \rightarrow f(x)$

Es diu **original** el valor x, i **imatge** el valor y; o també pot ser el valor y la **imatge** i el valor x la seva **antiimatge**.

El conjunt de valors que pot prendre la variable x es diu **domini** de la funció, i el conjunt de valors que pot prendre la variable y es denomina **recorregut** de la funció.

EXEMPLE

Calcula el domini i el recorregut de les funcions.

a) $f(x) = -5x - 2$ En aquest cas, la variable independent x pot prendre qualsevol valor real, i per a cada un d'aquests nombres reals s'obté un valor real de la variable dependent y. Així, tenim que: $\text{Im } f = \mathbb{R}$, $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$ En aquest cas, la variable independent x pot prendre qualsevol valor real, tret d'aquell valor per al qual s'anul·la el denominador, ja que no existeix la divisió entre zero. Per tant, el domini és: $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$

El recorregut és tots els nombres reals: $\text{Im } f = \mathbb{R}$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ En aquest cas, la variable independent pot prendre qualsevol valor real positiu més gran o igual que zero, ja que no existeix l'arrel quadrada d'un nombre negatiu. Així, el domini és $\text{Dom} = \mathbb{R}^+$. El recorregut és el conjunt dels nombres reals positius, $R = \mathbb{R}^+$.

ACTIVITATS

1 Sigui la funció $f(x)$ que associa a cada nombre real el seu doble més 5 unitats.

a) Calcula la seva fórmula o la seva expressió algebraica.

b) Calcula $f(0)$, $f(-1)$ i $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

c) Determina l'antiimatge de $\dfrac{16}{3}$.

d) Determina'n el domini i el recorregut.

2 Donada la relació que associa a cada nombre real l'invers de la resta d'aquell nombre menys 3:

a) Determina si és o no una funció i, en cas de ser-ho, indica'n la fórmula.

b) Calcula $f(0)$, $f(-1)$ i $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

c) Calcula l'antiimatge de $\dfrac{1}{4}$.

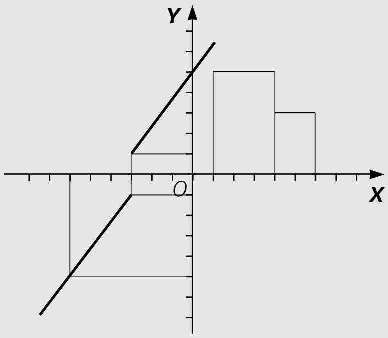
d) Determina'n el domini i el recorregut.

DISTINGIR ENTRE FUNCIONS CONTÍNUES I DISCONTÍNUES

Nom: Curs: Data:

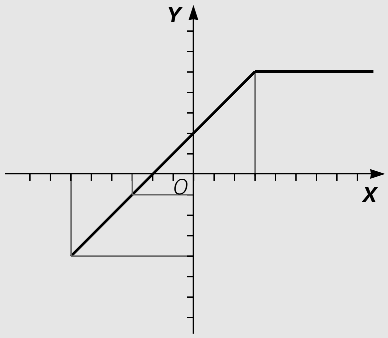
FUNCIÓ NO CONTÍNUA

Una funció no és contínua si té punts en els quals una petita variació de la variable independent produeix un salt en els valors de la variable dependent. Aquests punts es denominen punts de discontinuïtat.



FUNCIÓ CONTÍNUA

Una funció és contínua si la seva gràfica es pot dibuixar d'un sol traç, és a dir, no presenta punts de discontinuïtat.



ACTIVITATS

1 En una botiga de fotocòpies tenen la següent llista de preus.

Quantitat	Preu per còpia
Menys de 10	0,06 €
D'11 a 20	0,04 €
De 21 a 50	0,03 €
Més de 50	0,02 €

Representa la funció que relaciona el nombre de fotocòpies fetes i l'import total.

És una funció contínua?

2 La tarifa per l'abaixament de bandera en un taxi és de 2 €, i per cada 500 m recorreguts cal abonar 0,50 €.

a) Construeix la taula de valors de la funció i representa-la.

b) És una funció contínua o discontínua?

c) Calcula el preu d'un recorregut de 3 km.

ESTUDIAR EL CREIXEMENT I EL DECREIXEMENT D'UNA GRÀFICA

Nom: Curs: Data:

Donats una funció $f(x)$ i dos valors x_1 i x_2, tals que $x_1 < x_2$:

- Si $f(x_1) - f(x_2) > 0$, la funció és **creixent** entre x_1 i x_2.
- Si $f(x_1) - f(x_2) < 0$, la funció és **decreixent** entre x_1 i x_2.

EXEMPLE

La temperatura d'un malalt va evolucionar al llarg de 14 dies segons es mostra en el gràfic següent.

a) En quins dies va pujar la temperatura?

b) En quins dies es va mantenir constant?

c) I en quins dies va baixar?

d) Quina va ser la temperatura màxima assolida? En quin dia la va tenir?

e) Quina va ser la temperatura mínima assolida? En quin dia hi va arribar?

f) Si li van donar una pastilla els dies en què la temperatura va pujar per damunt de 38 °C, quins dies va prendre la pastilla?

a) Veiem que la temperatura va pujar els dies 5è, 6è i 8è. Els intervals de creixement de la funció són (4, 6) i (7, 8).

b) Es va mantenir constant els dies 1r, 2n, 4t, 7è, 10è, 12è, 13è i 14è.

c) La temperatura va baixar els dies 3r, 9è i 11è. Els intervals de decreixement de la funció són (2, 3), (8, 9) i (10, 11).

d) La temperatura màxima va ser de 40 °C, i hi va arribar el dia 8è.

e) La temperatura mínima va ser de 36 °C. Hi va arribar l'onzè dia i la va mantenir fins al final.

f) Va prendre la pastilla els dies 6è, 7è, 8è, 9è, 10è i 11è.

ACTIVITATS

1 Representa una funció definida pels valors següents.

$f(0) = 2$	$f(2) = 1$	$f(4) = 3$	$f(6) = 6$	$f(8) = 4$
$f(1) = 2$	$f(3) = 3$	$f(5) = 5$	$f(7) = 4$	$f(9) = 2$

a) En quins trams la funció és creixent?

b) En quins trams és decreixent?

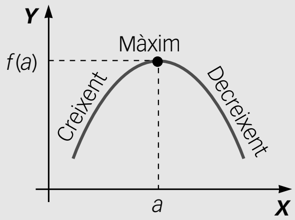
c) I en quins trams és constant?

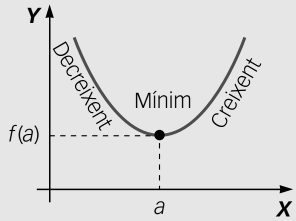
d) Té algun punt de discontinuïtat?

ESTUDIAR EL CREIXEMENT I EL DECREIXEMENT D'UNA GRÀFICA

Nom: Curs: Data:

- Una funció té un **màxim** en un punt si a l'esquerra d'aquest punt la funció és creixent, i a la dreta, la funció és decreixent.
- Una funció té un **mínim** en un punt si a l'esquerra d'aquest punt la funció és decreixent, i a la dreta, la funció és creixent.





2 Donada la funció $y = x^2 - 1$, construeix-ne la taula de valors, representa-la i estudia si és contínua o discontínua, el creixement i el decreixement, i si té màxims i mínims.

3 En la taula següent figuren les temperatures mitjanes registrades durant un any en una localitat.

Mes	Gen.	Feb.	Març	Abril	Maig	Juny	Jul.	Ago.	Set.	Oct.	Nov.	Des.
***T* (°C)**	4											

a) Dibuixa una gràfica a partir de la taula.

b) La funció representada, és contínua?

c) Quins són els intervals de creixement i decreixement?

d) Té algun màxim o mínim?

CALCULAR ELS PUNTS DE TALL AMB ELS EIXOS

Nom: Curs: Data:

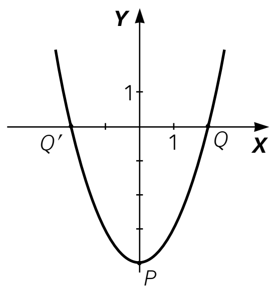
Els punts en els quals la funció $y = f(x)$ talla els eixos es calculen d'aquesta manera.

- **Punts de tall amb l'eix *Y*:** fent $x = 0$ s'obté $f(0)$. Els punts de tall són del tipus $P(0, f(0))$.
- **Punts de tall amb l'eix *X*:** fent $f(x) = 0$ s'obté el valor o els valors corresponents de x. Els punts de tall són del tipus $Q(x, 0)$.

EXEMPLE

La funció $f(x) = x^2 - 4$ té aquests punts de tall:

- Amb l'eix Y, si $x = 0 \rightarrow y = 0 - 4 = -4$.
  Té un únic punt de tall amb l'eix Y: $P(0, -4)$
- Amb l'eix X, si $y = 0 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$.
  Té dos punts de tall amb l'eix X: $Q(2, 0)$ i $Q'(-2, 0)$



ACTIVITATS

1 Donades les funcions següents, resol.

1r Construeix la taula de valors i dibuixa la funció.

2n Determina'n el domini i el recorregut.

3r Digues quins són els seus intervals de creixement o decreixement, i si tenen algun màxim o mínim.

4t Calcula els punts de tall amb els eixos, si n'hi ha.

a) $f(x) = 2x - 1$

c) $f(x) = x^2 - 4x + 4$

b) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

d) $f(x) = \dfrac{-x + 6}{3}$

CONÈIXER LES FUNCIONS DEFINIDES PER TROSSOS DE RECTA

Nom: Curs: Data:

EXEMPLE

Considerem la funció definida per: $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ -\dfrac{x}{2} + \dfrac{11}{2} & \text{si } 1 < x \end{cases}$

Aquesta funció té tres trossos rectes que determinen el domini format pels nombres reals. Per a cada interval construïm la taula de valors i dibuixem la gràfica.

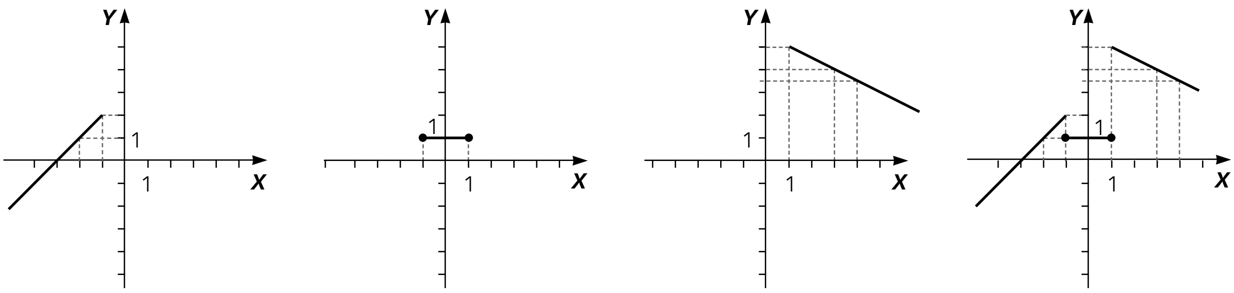
Assenyalem amb un punt (•) per indicar que el punt està inclòs en aquest tros de recta.

La funció $f(x)$ és discontínua en $x = -1$ i en $x = 1$, és creixent en el primer tros i decreixent en el tercer.

x	−4	−3	−2
f(x)	−1	0	1

x	−1	3	1
f(x)	1	1	1

x	2	3	4
f(x)	9/2	4	7/2



ACTIVITATS

1 Representa la funció.

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x < -4 \\ -\dfrac{1}{2}x - 3 & \text{si } -4 \leq x < 0 \\ \dfrac{2}{5}x - 3 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2} & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ -5 & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$$

Nom: Curs: Data:

ACTIVITATS

1 De les funcions següents coneixem l'expressió en l'interval $(-\infty, 0)$. Calcula'n l'expressió algebraica en $[0, +\infty)$.

a) $f(x) = -x$ si $x < 0$ i és una funció simètrica respecte de l'eix *Y*.

b) $f(x) = x^2$ si $x < 0$ i és una funció simètrica respecte de l'origen.

c) $f(x) = \frac{x}{2} + 2$ si $x < 0$ i és una funció simètrica respecte de l'eix *Y*.

2 Volem fer un viatge a l'estranger i preguntem en dues agències.

a) Representa les funcions que relacionen els quilòmetres recorreguts i el preu.

b) Amb quina agència interessa contractar el viatge?

3 En un parc d'atraccions hi ha una roda de 12 m de diàmetre.

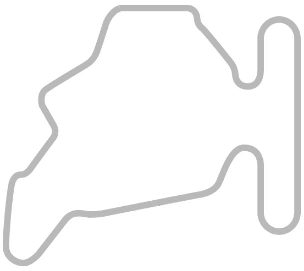
a) Representa l'altura a què arriba un nen que puja a la roda, en cada moment, durant 4 voltes.

b) Fes un esborrany de la funció, estudiant-ne la periodicitat. Quin és el seu període?

4 Al Gran Premi d'Hongria d'automobilisme, el pilot Fernando Alonso va obtenir la seva primera victòria en Fórmula 1, en un circuit de 4 381 m de longitud.

a) Representa aproximadament l'evolució de la velocitat del cotxe durant 4 voltes. És una funció periòdica?

b) Dibuixa la gràfica que correspongui a la volta en què el pilot s'atura a repostar.



5 Si $f(f(x)) = 5x - 2008$ per a qualsevol valor de x, demostra que existeix un nombre enter n tal que $f(n) = 5n - 2008$. Quant val n?

1 De les funcions següents coneixem l'expressió en l'interval $(-\infty, 0)$. Calcula'n l'expressió algebraica en $[0, +\infty)$.

a) $f(x) = -x$ si $x < 0$ i és una funció simètrica respecte de l'eix *Y*.

b) $f(x) = x^2$ si $x < 0$ i és una funció simètrica respecte de l'origen.

c) $f(x) = \dfrac{x}{2} + 2$ si $x < 0$ i és una funció simètrica respecte de l'eix *Y*.

a) Per ser simètrica respecte de l'eix *y* satisfà que $f(-x) = f(x)$; per tant, en $[0,+\infty)$ la funció és: $f(x) = x$

b) Per ser simètrica respecte de l'origen satisfà que $f(-x) = -f(x)$; per tant, en $[0,+\infty)$ la funció és: $f(x) = -x^2$

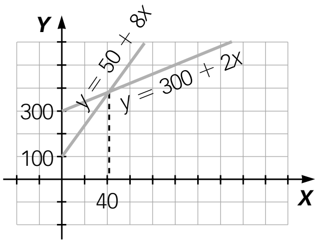
c) Per ser simètrica respecte de l'eix *y* satisfà que $f(-x) = f(x)$; per tant, en $[0,+\infty)$ la funció és: $f(x) = \dfrac{x}{2} + 2$

2 Volem fer un viatge a l'estranger i preguntem en dues agències.

a) Representa les funcions que relacionen els quilòmetres recorreguts i el preu.

b) Amb quina agència interessa contractar el viatge?

a)



b) Viatges Àguila: $y = 300 + 2x$

Viatges Princesa: $y = 50 + 8x$

$300 + 2x = 50 + 8x \rightarrow x = 41{,}67$

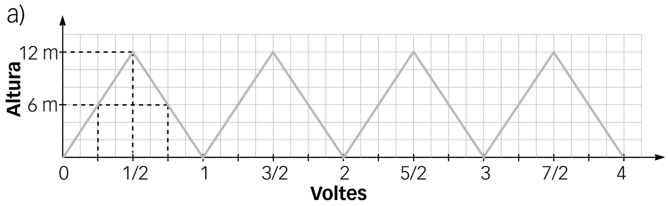
Per a viatges amb trajecte inferior a 41,67 km ens interessa contractar Viatges Princesa. I com que volem viatjar a l'estranger, serà millor contractar Viatges Àguila.

3 En un parc d'atraccions hi ha una roda de 12 m de diàmetre.

a) Representa l'altura a què arriba un nen que puja a la roda, en cada moment, durant 4 voltes.

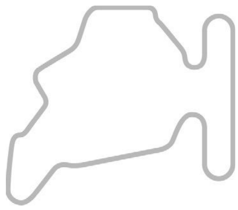
b) Fes un esborrany de la funció, i estudia'n la periodicitat. Quin és el seu període?

a)



b) La funció és creixent fins arribar a l'altura de 12 m (mitja volta) i, després, és decreixent fins a estar a nivell de terra (una altra mitja volta). El període de la funció és una volta.

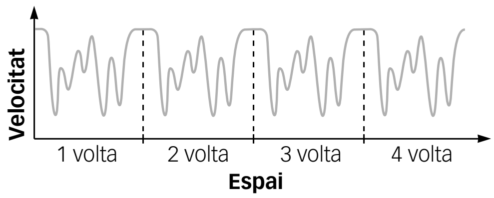
4 Al Gran Premi d'Hongria d'automobilisme, el pilot Fernando Alonso va obtenir la primera victòria en Fórmula 1, en un circuit de 4 381 m de longitud.



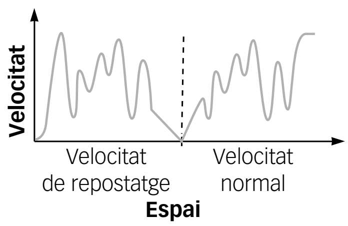
a) Representa aproximadament l'evolució de la velocitat del cotxe durant 4 voltes. És una funció periòdica?

b) Dibuixa la gràfica que correspongui a la volta en què el pilot s'atura a repostar.

a) Gràfica corresponent a 4 voltes:



b) Gràfica corresponent a la volta en la qual s'atura a repostar.



5 Si $f(f(x)) = 5x - 2\,008$ per a qualsevol valor de *x*, demostra que existeix un nombre enter *n* tal que $f(n) = 5n - 2\,008$. Quant val *n*?

Sabem que $f(f(x)) = 5x - 2\,008$ per a qualsevol valor de *x*.

Demostrarem que existeix un valor tal que $f(f(x)) = x$.

$$x = 5x - 2\,008 \rightarrow x = \frac{2\,008}{4} = 502 \rightarrow f(f(502)) = 502$$

$$f(f(502)) = 502 \rightarrow f(f(f(502))) = f(502)$$

$$\rightarrow 5f(502) - 2\,008 = f(502) \rightarrow f(502) = \frac{2\,008}{4} = 502$$

Per tant, s'ha demostrat que existeix un valor $n = 502$ tal que $f(n) = n \rightarrow f(f(n)) = f(n)$ i com que $f(f(n)) = 5n - 2\,008$ per a qualsevol *n*.

Per al valor $n = 502$ tenim que $f(f(502)) = 5 \cdot 502 - 2\,008 = 502$.

CONÈIXER LA FUNCIÓ DE PROPORCIONALITAT DIRECTA

Nom: Curs: Data:

Una **funció de proporcionalitat directa** s'expressa de la forma: $\boldsymbol{y = mx}$, on m és un nombre qualsevol.

La **representació gràfica** d'aquestes funcions és una **recta que passa per l'origen de coordenades**.

La inclinació d'aquesta recta respecte a l'eix d'abscisses és representada pel nombre m, que rep el nom de **pendent**. Com més gran sigui m, més inclinada estarà la recta respecte de l'eix X, és a dir, més gran serà l'angle que aquesta recta formi amb l'horitzontal.

Quan entre dues magnituds hi ha una **relació de proporcionalitat directa**, la funció que representa aquesta relació és de tipus lineal.

EXEMPLE

Determina, a partir dels parells de valors de la taula, si la relació entre les magnituds que hi apareixen és de proporcionalitat o no.

Entrades de cine	1	2	3	4	5	6
Import (€)	4,50	9	13,50	18	22,50	27

El nombre d'entrades i l'import que es paga són magnituds directament proporcionals, ja que si multipliquem el nombre d'entrades, multiplicarem pel mateix nombre els diners que s'han de pagar.

La constant de proporcionalitat és:

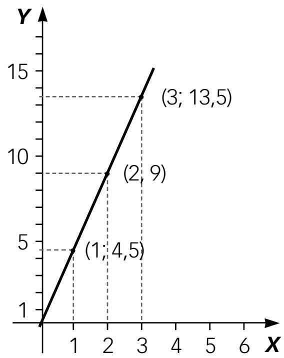
$$m = \frac{4,5}{1} = \frac{9}{2} = \frac{13,5}{3} = \frac{18}{4} = \ldots = 4,5$$

L'expressió algebraica de la funció que relaciona les dues magnituds és:

$$y = mx \rightarrow y = 4,5x$$

on x és el nombre d'entrades i y és l'import.

La representació gràfica d'aquesta funció és una recta que passa per l'origen de coordenades i té de pendent $m = 4,5$. Per representar-la cal assenyalar en un sistema d'eixos de coordenades els punts: (1; 4,5), (2, 9), (3; 13,5), (4, 18)…



ACTIVITATS

1 Un atleta ha recorregut les distàncies que es mostren en la taula en els temps que s'indiquen.

Temps (min)	1	2	3	4
Recorregut (km)	0,2	1	1,6	2,4

Determina, a partir d'aquests parells de valors, si la relació entre les dues magnituds és de proporcionalitat o no i, en cas de ser-ho, dedueix l'expressió algebraica de la funció que les relaciona i representa-la.

FUNCIONS LINEALS

Nom: Curs: Data:

Una **funció lineal** s'expressa de la forma: $\boldsymbol{y = mx + n}$, on m i n *són* dos nombres qualssevol.

- m és el **pendent** de la recta. Si $\boldsymbol{m > 0}$, la recta és **creixent**, i si $\boldsymbol{m < 0}$, la recta és **decreixent**.
- n és l'ordenada en l'origen.

La representació gràfica d'aquestes funcions és una **recta que no passa per l'origen de coordenades**, sinó que passa pel punt $(0, n)$.

Les funcions de proporcionalitat directa són un cas particular de les funcions lineals, quan $n = 0$.

EXEMPLE

Donades les funcions següents: $\boldsymbol{y = 2x + 2}$ $\boldsymbol{y = -x + 2}$

a) Determina'n el pendent i l'ordenada en l'origen.

b) Com seran les rectes, creixents o decreixents?

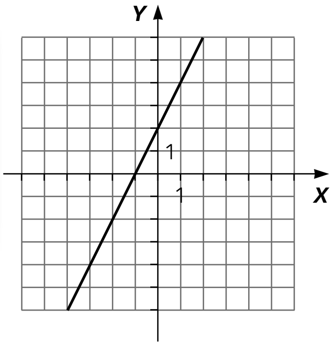
c) Construeix la taula de valors i representa-la.

a) $y = 2x + 2 \rightarrow m_1 = 2, n_1 = 2$

b) Com que el pendent és positiu: $m_1 = 2 > 0$, la primera recta és creixent.

c)

x	y
0	2
1	4
-1	0
2	6

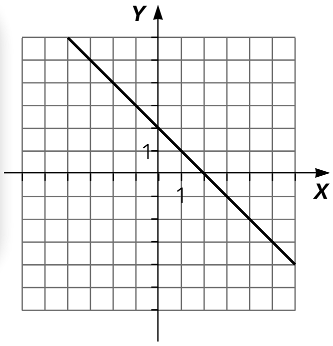


a) $y = -x + 2 \rightarrow m_2 = -1, n_2 = 2$

b) Com que el pendent és negatiu: $m_2 = -1 < 0$, la segona recta és decreixent.

c)

x	y
0	2
1	1
-1	3
2	0



ACTIVITATS

1 Classifica aquestes funcions en lineals o afins. Escriu, en cada cas, el valor del pendent i de l'ordenada en l'origen. Construeix les seves taules de valors i representa-les.

a) $y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}$

b) $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

OBTENIR L'EQUACIÓ DE LA RECTA QUE PASSA PER DOS PUNTS

Nom: Curs: Data:

Per representar una recta cal conèixer dos punts pels quals passa. Així, per calcular l'equació de la recta $y = mx + n$ que passa per dos punts $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$:

1r **Calculem el valor del pendent**: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

2n Substituïm les coordenades d'un dels punts en l'equació general de la recta $y = mx + n$ i **obtenim el valor de l'ordenada en l'origen, *n***:

$$y_1 = mx_1 + n \rightarrow n = y_1 - mx_1$$
$$y_2 = mx_2 + n \rightarrow n = y_2 - mx_2$$

3r **Substituïm els valors obtinguts** per al pendent (m) i l'ordenada en l'origen (n) en l'equació general de la recta.

EXEMPLE

Calcula l'equació general de la recta que passa pels punts *A*(−1, −2) i *B*(2, 3).

1r Calculem el valor del pendent:

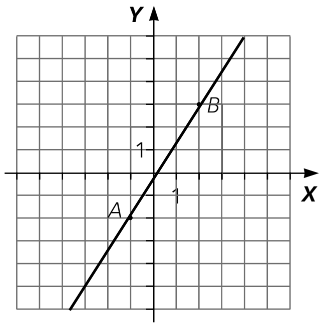
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - (-2)}{2 - (-1)} = \frac{5}{3}$$

2n Obtenim el valor de l'ordenada en l'origen, substituint, per exemple, el punt A:

$$y = mx + n \rightarrow -2 = \frac{5}{3} \cdot (-1) + n$$

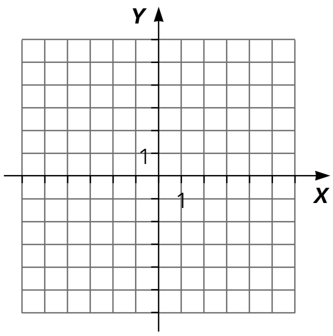
$$n = -2 + \frac{5}{3} = \frac{-6 + 5}{3} = \frac{-1}{3}$$

3r Substituïm els valors obtinguts en l'equació general: $y = \dfrac{5}{3}x - \dfrac{1}{3}$.



ACTIVITATS

1 Escriu i representa l'equació de la recta que passa pels punts $A(0, 4)$ i $B(3, 1)$.



2 Determina l'equació de la recta que té per pendent $m = 2$ i que passa pel punt (0, 3).

3 Calcula l'equació de la recta que té per ordenada en l'origen $n = -1$ i que passa pel punt (4, 5).

CONÈIXER LA FUNCIÓ QUADRÀTICA $y = ax^2$

Nom: Curs: Data:

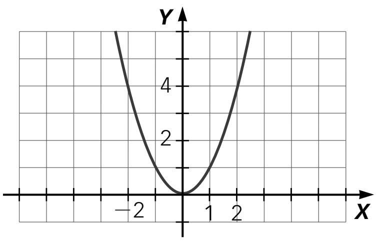
- Quan $a > 0$, la gràfica de la funció $y = ax^2$ és una paràbola oberta cap amunt (en forma de got). Quan $a < 0$ és una paràbola oberta cap avall (en forma de campana).
- En les paràboles d'equació $y = ax^2$, l'eix Y és el seu eix de simetria.

EXEMPLE

Representa les funcions següents.

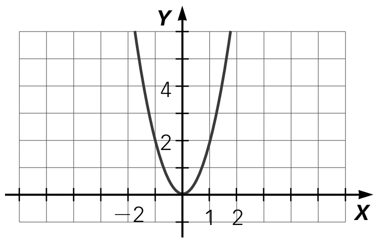
a) $y = x^2$

x	−2	−1	0	1	2
y	4	1	0	1	4



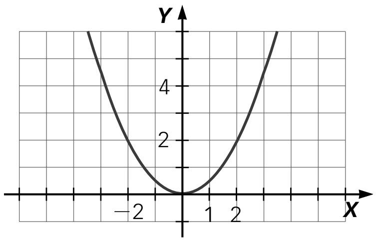
b) $y = 2x^2$

x	−2	−1	0	1	2
y	8	2	0	2	8



c) $y = \frac{1}{2}x^2$

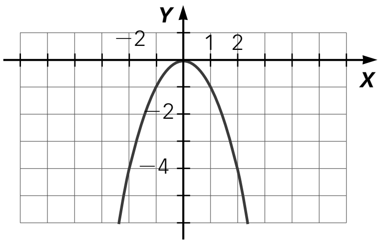
x	−2	−1	0	1	2
y	2	1/2	0	1/2	4



Les tres paràboles tenen forma de got. Veiem que la paràbola $y = 2x^2$ és més estreta que la paràbola $y = x^2$. En canvi, la paràbola $y = \frac{1}{2}x^2$ és més ampla que la paràbola $y = x^2$.

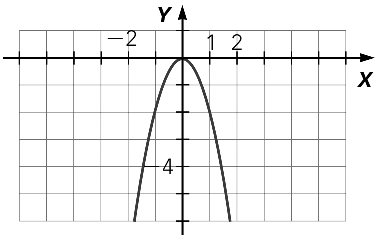
d) $y = -x^2$

x	−2	−1	0	1	2
y	−4	−1	0	−1	−4



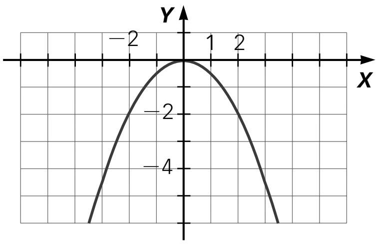
e) $y = -2x^2$

x	−2	−1	0	1	2
y	−8	−2	0	−2	−3



f) $y = -\frac{1}{2}x^2$

x	−2	−1	0	1	2
y	−2	−1/2	0	−1/2	−3



Aquestes tres paràboles són iguals que les anteriors, però estan obertes cap avall i tenen forma de campana.

ACTIVITATS

1 Sense representar-les, digues quines de les paràboles següents tenen forma de got o de campana i quines són més amples o més estretes que $y = x^2$.

a) $y = \frac{1}{4}x^2$ b) $y = -\frac{1}{3}x^2$ c) $y = 5x^2$ d) $y = -7x^2$ e) $y = \frac{5}{3}x^2$ f) $y = -9x^2$

EFECTUAR TRANSLACIONS DE LA FUNCIÓ $y = x^2$

Nom: Curs: Data:

TRANSLACIONS VERTICALS

La gràfica de $y = x^2 + k$ s'obté traslladant verticalment k unitats la gràfica de $y = x^2$.

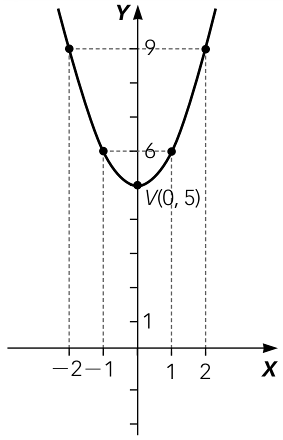
- Si $k > 0$, la translació vertical és cap amunt.
- Si $k < 0$, la translació vertical és cap avall.

EXEMPLE

Representa les funcions següents.

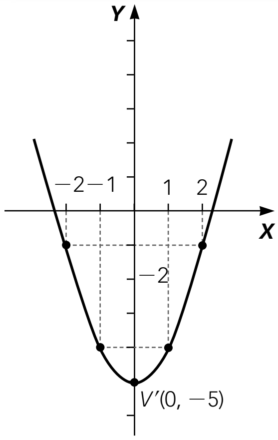
a) $y = x^2 + 5$

x	-2	-1	0	1	2
y	9	6	5	6	9



b) $y = x^2 - 5$

x	-2	-1	0	1	2
y	-1	-4	-5	-4	-1



La paràbola $y = x^2 + 5$ és igual que $y = x^2$, però traslladada 5 unitats cap amunt, mentre que la paràbola $y = x^2 - 5$ és igual que $y = x^2$, però traslladada 5 unitats cap avall.

El vèrtex de $y = x^2 + 5$ està en $V(0, 5)$, mentre que el vèrtex de $y = x^2 - 5$ està en $V'(0, -5)$. Així, l'eix de simetria és igual en les dues gràfiques: l'eix Y, i passa pel vèrtex de cada paràbola.

ACTIVITATS

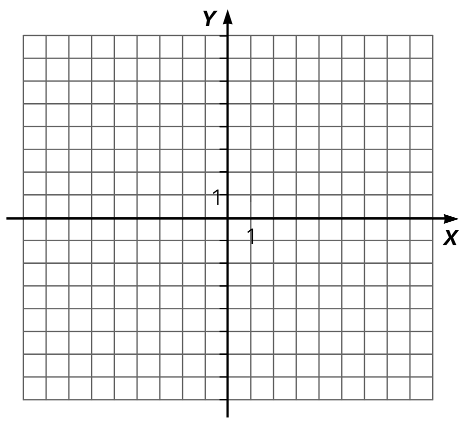
1 Representa sobre el mateix sistema d'eixos, amb colors diferents, les paràboles següents.

a) $y = x^2 - 1$

b) $y = x^2 + 1$

c) $y = x^2 + 3$

Calcula les coordenades dels seus vèrtexs i dels punts de tall amb l'eix X, igualant $y = 0$.



EFECTUAR TRANSLACIONS DE LA FUNCIÓ $y = x^2$

Nom: Curs: Data:

TRANSLACIONS HORITZONTALS

La gràfica de $y = (x + h)^2$ s'obté traslladant horitzontalment h unitats la gràfica de $y = x^2$.

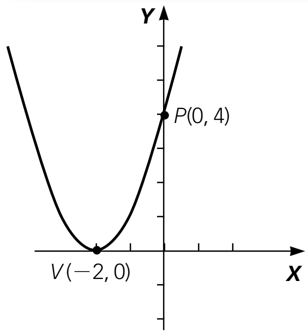
- Si $h > 0$, la translació horitzontal és cap a l'esquerra.
- Si $h < 0$, la translació horitzontal és cap a la dreta.

EXEMPLE

Representa les funcions.

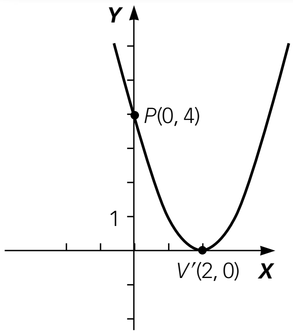
a) $y = (x + 2)^2$

x	-2	-1	0	1	2
y	0	1	4	9	16



b) $y = (x - 2)^2$

x	-2	-1	0	1	2
y	16	9	4	1	0



La paràbola $y = (x + 2)^2$ és igual que $y = x^2$, però traslladada 2 unitats cap a l'esquerra, mentre que la paràbola $y = (x - 2)^2$ és igual que $y = x^2$, però traslladada 2 unitats cap a la dreta.

El vèrtex de $y = (x + 2)^2$ està en $V(-2, 0)$, mentre que el vèrtex de $y = (x - 2)^2$ està en $V'(2, 0)$. Així, l'eix de simetria de la paràbola $y = (x + 2)^2$ és la recta $x = -2$, mentre que l'eix de $y = (x - 2)^2$ és la recta $x = 2$, que és paral·lela a l'eix Y.

ACTIVITATS

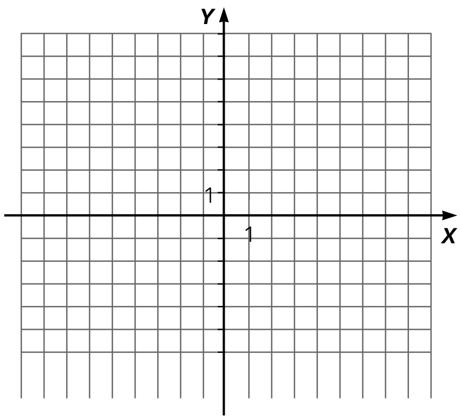
2 Representa sobre el mateix sistema d'eixos, i amb colors diferents, les paràboles següents.

a) $y = (x - 1)^2$

b) $y = (x + 1)^2$

c) $y = x^2 + 3$

Calcula les coordenades dels seus vèrtexs i dels punts de tall amb l'eix Y, igualant $x = 0$.



EFECTUAR TRANSLACIONS DE LA FUNCIÓ $y = x^2$

Nom: Curs: Data:

TRANSLACIONS VERTICALS I HORITZONTALS

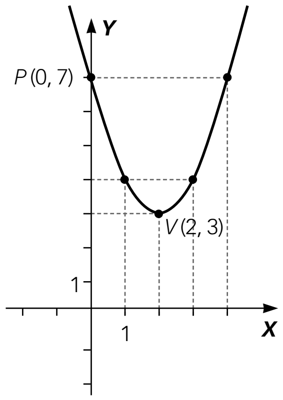
La gràfica de $y = (x - h)^2 + k$ és una paràbola com la gràfica de $y = x^2$, però amb el vèrtex en el punt (h, k).

EXEMPLE

Representa la funció $y = (x - 2)^2 + 3$.

Obtenim la seva taula de valors:

x	0	1	2	3	4
y	7	4	3	4	7



Si traslladem la paràbola $y = x^2$ en 2 unitats a la dreta s'obté la paràbola $y = (x - 2)^2$.
Si a continuació traslladem aquesta paràbola en 3 unitats cap amunt, obtenim la paràbola d'equació $y = (x - 2)^2 + 3$.

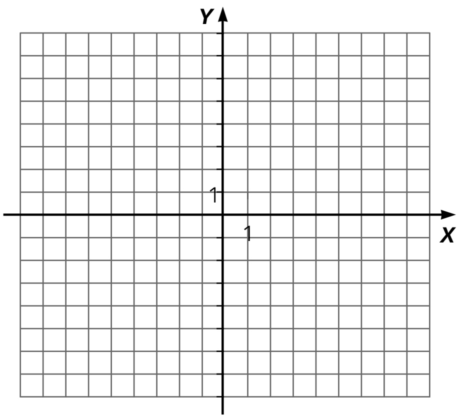
El vèrtex de $y = (x - 2)^2 + 3$ està en el punt $(h, k) = (2, 3)$.

El seu eix de simetria és la recta $x = 2$, que és paral·lela a l'eix Y.

3 A partir de la paràbola $y = x^2$, representa les paràboles següents sobre el mateix sistema d'eixos, amb colors diferents, i explica com ho fas.

a) $y = (x + 2)^2 - 3$ b) $y = (x + 1)^2 + 3$ c) $y = (x - 3)^2 - 1$

Determina les coordenades dels seus vèrtexs i dels punts de tall amb l'eix Y, igualant $x = 0$.



REPRESENTAR LA FUNCIÓ QUADRÀTICA $y = ax^2 + bx + c$

Nom: Curs: Data:

Per representar una funció quadràtica $y = ax^2 + bx + c$ se segueixen aquests passos:

1r Es calculen els punts de tall amb l'eix X. Després, es calcula el punt de tall amb l'eix Y, si n'hi ha.

2n Es calcula el vèrtex, que té per abscissa $x = -\frac{b}{2a}$, i que és el valor que ha de coincidir amb l'abscissa del punt mitjà entre els dos punts de tall amb l'eix X.

EXEMPLE

Representa la funció $y = 2x^2 - 9x - 18$.

1r Calculem els punts de tall amb l'eix X, fent $y = 0$.

$$2x^2 - 9x - 18 = 0 \rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 + 4 \cdot 2 \cdot 18}}{2 \cdot 2} = \frac{9 \pm 15}{4} = \begin{cases} 6 \\ -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Els punts de tall amb l'eix X són $P(6, 0)$ i $Q\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$.

Per calcular el punt de tall amb l'eix Y fem $x = 0 \rightarrow y = -18 \rightarrow R(0, -18)$.

2n El vèrtex tindrà per abscissa el valor $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-9}{2 \cdot 2} = \frac{9}{4}$.

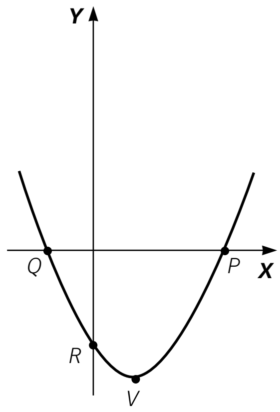
El valor de l'ordenada y_V l'obtenim substituint el valor de x_V en l'equació de la paràbola:

$$y_V = 2x_V^2 - 9x_V - 18 = 2 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^2 - 9 \cdot \frac{9}{4} - 18 =$$

$$= \frac{81}{8} - \frac{81}{4} - 18 = \frac{81 - 162 - 144}{8} = -\frac{225}{8}$$

Així, el vèrtex és el punt $V\left(\frac{9}{4}, -\frac{225}{8}\right)$.

L'eix de simetria de la paràbola $y = 2x^2 - 9x - 18$ és la recta $x = \frac{9}{4}$.



ACTIVITATS

1 **Represента les paràboles següents.**

a) $y = -x^2 + 6x - 8$

b) $y = x^2 - 4x - 5$

CONÈIXER LA FUNCIÓ DE PROPORCIONALITAT INVERSA

Nom: Curs: Data:

- Una funció de proporcionalitat inversa s'expressa de la manera següent.

$$xy = k \rightarrow y = \frac{k}{x}, \text{ on } k \neq 0.$$

- La representació gràfica d'aquestes funcions és una hipèrbola.
- Quan entre dues magnituds hi ha una relació de proporcionalitat inversa, la funció que representa aquesta relació és del tipus anterior.

EXEMPLE

Un cotxe que circula a una velocitat constant de 90 km/h triga 2 hores a recórrer una distància. Quant hauria trigat si hagués anat a 120 km/h? I si hagués circulat a 60 km/h?

Les dues variables relacionades són la velocitat i el temps, ja que l'espai recorregut no varia. Construïm la següent taula de valors entre les dues variables.

Velocitat (km/h)	30	60	90	120
Temps (h)	6	3	2	1,5

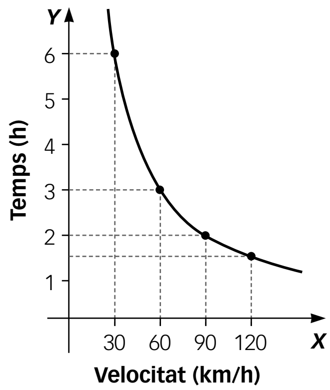
- Veiem que en duplicar la velocitat, el temps es redueix a la meitat; per tant, les dues magnituds, velocitat i temps, són inversament proporcionals.
- La relació que compleixen les dues magnituds és:

$$30 \cdot 6 = 60 \cdot 3 = 90 \cdot 2 = 120 \cdot 1{,}5 = 180 = k$$

- L'expressió algebraica de la funció que relaciona la velocitat i el temps és:

$$vt = k \rightarrow vt = 180 \rightarrow t = \frac{180}{v}$$

La representació gràfica d'aquesta funció és la branca del primer quadrant d'una hipèrbola.



ACTIVITATS

1 La següent taula de valors correspon a una funció de proporcionalitat inversa.

a) Completa la taula.

b) Escriu l'expressió algebraica de la funció.

c) Representa la funció.

x	1	2	3	4	5	6
y			7/3			

CONÈIXER LA FUNCIÓ DE PROPORCIONALITAT INVERSA

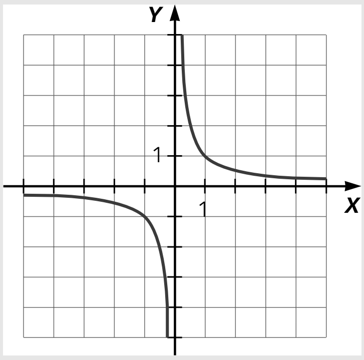
Nom: Curs: Data:

Representa la funció de proporcionalitat inversa $y = \frac{1}{x}$.

En aquest cas, la variable x també pot prendre valors negatius.
Construïm la taula de valors.

x	1	−1	2	−2	3	−3
y	1	−1	1/2	−1/2	1/3	−1/3

Observa que x no pot prendre el valor 0, ja que no existeix $\frac{1}{0}$.



2 Representa la funció de proporcionalitat inversa $y = -\frac{1}{x}$ i compara-la amb la funció de l'exemple anterior.

Les gràfiques de $y = \frac{1}{x}$ i $y = -\frac{1}{x}$ són hipèrboles, simètriques respecte a l'eix X.

La gràfica de la funció $y = \frac{1}{x} + k$, on k és un valor constant, s'obté traslladant verticalment la hipèrbola $y = \frac{1}{x}$ cap amunt (si $k > 0$) o cap avall (si $k < 0$) tantes unitats com sigui el valor de k.

3 Representa les hipèrboles següents.

a) $y = \frac{1}{x} + 3$

b) $y = \frac{1}{x} - 3$

Nom: Curs: Data:

ACTIVITATS

1 Volem construir un dipòsit prismàtic de base rectangular, de 2 metres d'altura i amb una capacitat de 500 litres.

a) Fes una taula amb els diferents valors de les dimensions que pot tenir.

b) Escriu la funció corresponent i representa-la.

2 Els alumnes de 4t d'ESO volen anar de viatge d'estudis. Per obtenir fons, compren 360 capses de polvorons que han de vendre entre tots els alumnes.

a) Fes una taula que relacioni el nombre d'alumnes que han de viatjar amb el nombre de capses que ha de vendre cada un.

b) Escriu l'expressió algebraica i representa la funció.

c) Comprova que el producte del nombre d'alumnes i el de capses és constant. Quin és aquest valor?

3 En Carles se'n va de vacances i vol llogar una caravana. Per això, acudeix a dues empreses de lloguer de caravanes, que li ofereixen diferents possibilitats.

a) Si en Carles ha de viatjar 8 dies amb la caravana, en quina empresa li resulta més barat fer-ho?

b) I si ha de viatjar 15 dies?

c) Escriu les funcions *Preu*—*Temps* i representa-les en els mateixos eixos. On es tallen? Què representa el punt de tall?

4 Fes la gràfica de $f(x)$ que compleixi que:

- És contínua en tot $\mathbb{R}$, tret de $x = -1$ i de $x = 1$.
- És creixent en $x < 0$ i és decreixent en $x > 0$.
- Tendeix a 1 quan x tendeix a $+\infty$.
- Tendeix a 1 quan x tendeix a $-\infty$.
- Té dues asímptotes verticals, una en $x = -1$ i l'altra en $x = 1$.
- Passa per l'origen i pel punt (2, 4).

1 Volem construir un dipòsit prismàtic de base rectangular, de 2 metres d'altura i amb una capacitat de 500 litres.

a) Fes una taula amb els diferents valors de les dimensions que pot tenir.

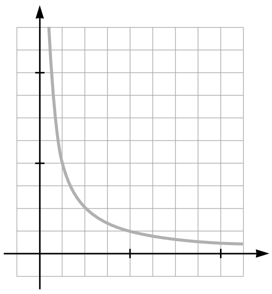
b) Escriu la funció corresponent i representa-la.

a) L'àrea del rectangle de la base ha de tenir 0,25 m^2.

Àrea = Base · Altura

Base	0,1	0,5	1	2	0,25
Altura	2,5	0,5	0,25	0,125	1

b) $y = \dfrac{0{,}25}{x}$



2 Els alumnes de 4t d'ESO volen anar de viatge d'estudis. Per obtenir fons compren 360 capses de polvorons que han de vendre entre tots els alumnes.

a) Fes una taula que relacioni el nombre d'alumnes que han de viatjar amb el nombre de capses que ha de vendre cada un.

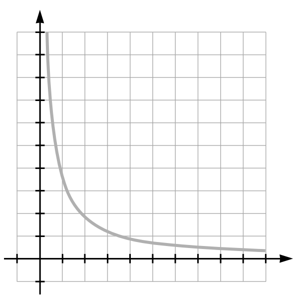
b) Escriu l'expressió algebraica i representa la funció.

c) Comprova que el producte del nombre d'alumnes i el de capses és constant. Quin és aquest valor?

a)

Nre. d'alumnes	1	10	20	60	120	360
Capses	360	36	18	6	3	1

b) $y = \dfrac{360}{x}$



c) El producte sempre val 360.

3 En Carles se'n va de vacances i vol llogar una caravana. Per això, acudeix a dues empreses de lloguer de caravanes, que li ofereixen diferents possibilitats.

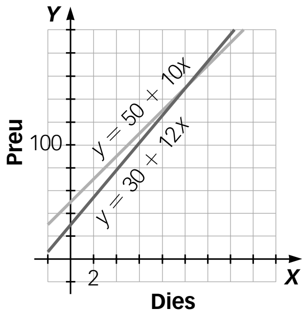
a) Si en Carles ha de viatjar 8 dies amb la caravana, en quina empresa li resulta més barat fer-ho?

b) I si ha de viatjar 15 dies?

c) Escriu les funcions *Preu*—*Temps* i representa-les en els mateixos eixos. On es tallen? Què representa el punt de tall?

a) Preu en la companyia A: 50 + 10 · 8 = 130 €
Preu en la companyia B: 30 + 12 · 8 = 126 €
Li resulta més barat fer-ho en la companyia B.

b) Preu en la companyia A:
50 + 10 · 15 = 200 €
Preu en la companyia B:
30 + 12 · 15 = 210 €
Li resulta més barat fer-ho en la companyia A.

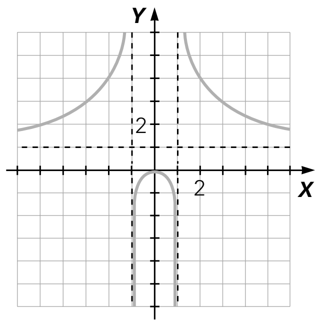


c) Funció de la companyia A:
$y = 50 + 10x$
Funció de la companyia B:
$y = 30 + 12x$

Les funcions es tallen en el punt (10, 150), és a dir, el preu de les dues companyies coincideix per a un lloguer de 10 dies, 150 €.

4 Fes la gràfica de $f(x)$ que compleixi que:

- És contínua en tot $\mathbb{R}$, tret de $x = -1$ i de $x = 1$.
- És creixent en $x < 0$ i és decreixent en $x > 0$.
- Tendeix a 1 quan x tendeix a $+\infty$.
- Tendeix a 1 quan x tendeix a $-\infty$.
- Té dues asímptotes verticals, una en $x = -1$ i l'altra en $x = 1$.
- Passa per l'origen i pel punt (2, 4).



RECONÈIXER FUNCIONS EXPONENCIALS

Nom: Curs: Data:

Una **funció exponencial** és una funció de la forma $\boldsymbol{f(x) = a^x}$ o $\boldsymbol{y = a^x}$, on a és un nombre real positiu ($a > 0$) i diferent d'1 ($a \neq 1$).

La funció exponencial $\boldsymbol{f(x) = a^x}$ compleix que:

- $f(0) = a^0 = 1$, un punt de la seva gràfica és (0, 1).
- $f(1) = a^1 = a$, un punt de la seva gràfica és (1, a).
- La funció és creixent si $a > 1$.
- La funció és decreixent si $a < 1$.

EXEMPLE

Representa les següents funcions exponencials.

a) $\boldsymbol{y = 2^x}$ **b)** $\boldsymbol{y = \left(\frac{1}{2}\right)^x}$

Fem una taula de valors utilitzant la calculadora, per exemple:

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \boxed{:} 2 = \boxed{x^y} 2 = 0{,}25$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 1 \boxed{:} 2 = \boxed{x^y} \boxed{\pm} 2 = 4$

a)

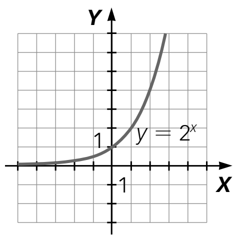
x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
2^x	0,0625	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	16

b)

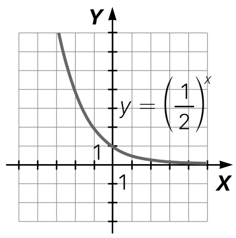
x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	16	8	4	2	1	0,5	0,25	0,125	0,0625

Representem les funcions sobre els eixos de coordenades:

a)



b)



ACTIVITATS

1 Fes una taula de valors i representa-hi les funcions exponencials.

a) $y = 4^x$ b) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

x	$y = 4^x$	$y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$
−2		
−1		
0		
1		
2		

RECONÈIXER FUNCIONS EXPONENCIALS

Nom: Curs: Data:

- Les funcions $\boldsymbol{y = a^x + b}$ són de tipus exponencial. La seva gràfica s'obté traslladant la gràfica de $y = a^x$ en b unitats cap amunt si b és positiu, i en b unitats cap avall, si és negatiu.
- Les funcions $\boldsymbol{y = a^{x+b}}$ són també de tipus exponencial. La seva gràfica s'obté traslladant la gràfica de $y = a^x$ en b unitats cap a l'esquerra si b és positiu, i en b unitats cap a la dreta, si és negatiu.

EXEMPLE

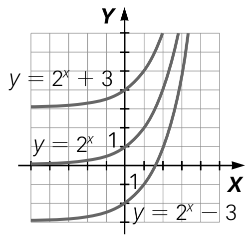
Representa, en els mateixos eixos que $y = 2^x$, les funcions exponencials.

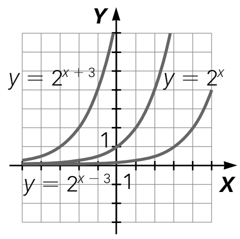
a) $y = 2^{x+3}$ **b)** $y = 2^{x-3}$ **c)** $y = 2^x + 3$ **d)** $y = 2^x - 3$

Fem la següent taula de valors.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2^x$	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8
$y = 2^{x+3}$	1	2	4	8	16	32	64
$y = 2^{x-3}$	0,015625	0,03125	0,0625	0,125	0,25	0,5	1
$y = 2^x + 3$	3,125	3,25	3,5	4	5	7	11
$y = 2^x - 3$	$-2{,}875$	$-2{,}75$	$-2{,}5$	-2	-1	1	5

Representem les funcions sobre els eixos de coordenades.





2 Representa, en els mateixos eixos que $y = 1{,}5x$, aquestes funcions exponencials.

a) $y = 1{,}5^{x+2}$ b) $y = 1{,}5^{x-1}$ c) $y = 1{,}5^x + 2$ d) $y = 1{,}5^x - 1$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 1{,}5^x$							
$y = 1{,}5^{x+2}$							
$y = 1{,}5^{x-1}$							
$y = 1{,}5^x + 2$							
$y = 1{,}5^x - 1$							

APLICAR FUNCIONS EXPONENCIALS A L'INTERÈS COMPOST

Nom: Curs: Data:

El **capital final**, C_f, obtingut en invertir un **capital**, C, a un **rèdit**, r, durant un **temps**, t, a **interès compost** és: $\boldsymbol{C_f = C \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t}$

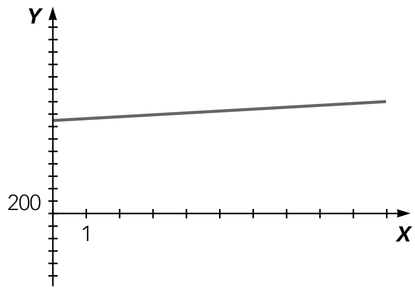
EXEMPLE

El capital que obtenim al cap de $t = 1, 2, 3, 4, 7$ i 10 anys en invertir un capital $C = 1500$ €, a interès compost, a un rèdit $r = 2\%$, es calcula amb la fórmula:

$$C_f = C \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = 1500 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^t = 1500 \cdot 1{,}02^t$$

Podem considerar la fórmula com una funció exponencial. En representar-la s'observa l'evolució del capital invertit. El capital inicial és el punt de tall de la gràfica amb l'eix Y.

X	$C_f = 1500 \cdot 1{,}02^t$
1	1530
2	1560,60
3	1591,81
4	1623,65
7	1723,03
10	1828,49



Per calcular quant de temps es trigarà a aconseguir 1650 €, calculem el punt de la gràfica que correspon a 1650 € en l'eix vertical i determinem la seva coordenada de l'eix horitzontal.

En aquest cas es trigarà aproximadament 4,8 anys, és a dir, uns 4 anys i 10 mesos.

ACTIVITATS

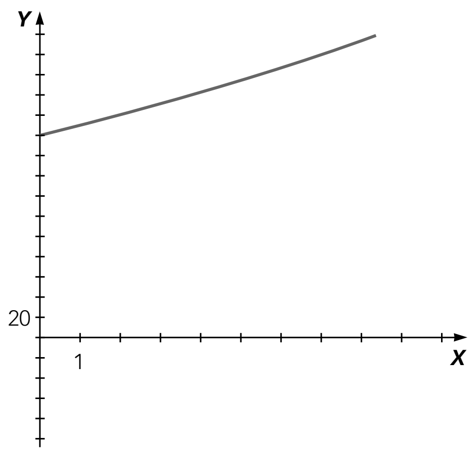
1 Calcula el capital que obtindrem en els 6 primers anys en invertir, a interès compost, un capital de 500 € a un rèdit del 2,5%.

2 La gràfica representa com evoluciona un capital C, invertit a interès compost, amb un rèdit del 5%. Respon les qüestions següents:

a) Quin és el capital inicial?

b) Indica el capital final que s'obtindrà al cap de 4 anys.

c) Quant de temps aproximat ha de passar per tenir 2200 €?



RECONÈIXER FUNCIONS LOGARÍTMIQUES

Nom: Curs: Data:

La **funció logarítmica** és de la forma $\boldsymbol{f(x) = \log_a x}$, on a és un nombre real positiu ($a > 0$) i diferent d'1 ($a \neq 1$).

La funció logarítmica $y = \log_a x$ compleix que:

- El domini és $(0, +\infty)$.
- $\log_a 1 = 0 \rightarrow$ Un punt de la seva gràfica és (1, 0).
- $\log_a a = 1 \rightarrow$ Un punt de la seva gràfica és $(a, 1)$.
- La funció és creixent quan $a > 1$ i és decreixent quan $a < 1$.

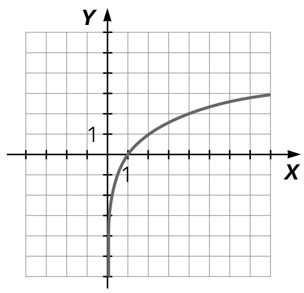
EXEMPLE

Representa la funció logarítmica $\boldsymbol{f(x) = \log_2 x}$.

Com que el domini $f = (0, +\infty)$ i $a > 1$, la funció és creixent.

Passa pels punts (1, 0) i (2, 1). Construïm una taula de valors.

x	$\log_2 x$
0,25	-2
0,5	-1
1	0
2	1
3	1,5849…
4	2



ACTIVITATS

1 Descriu les característiques de les funcions següents i comprova-les representant la seva gràfica en els mateixos eixos.

a) $y = \log_3 x$ b) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

2 Associa cada funció amb la seva gràfica.

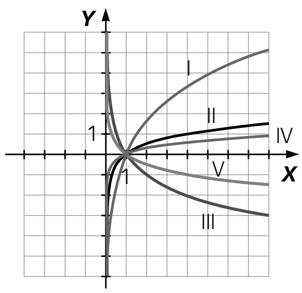
a) $y = \log x$ I)

b) $y = \log_{0,5} x$ II)

c) $y = \log_4 x$ II)

d) $y = \log_{1,5} x$ IV)

e) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ V)



RECONÈIXER FUNCIONS TRIGONOMÈTRIQUES

Nom: Curs: Data:

La funció $y = sin\ x$ té les característiques següents:

- Està definida per a qualsevol valor → Domini $= \mathbb{R}$
- Com que $-1 \leq sin\ x \leq 1$ → Recorregut $= [-1, 1]$
- És periòdica de període 2π:

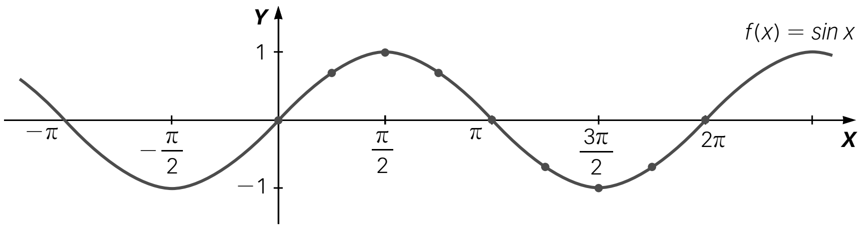
  $sin\ x = sin\ (x + 2k\pi)$, amb $k \in \mathbb{Z}$
- $sin\ (-x) = -sin\ (x)$ → és simètrica respecte de l'origen de coordenades.

Per representar aquesta funció, com que és periòdica de període 2π, construïm una taula per a valors entre 0 i 2π, representem la funció en aquest interval i repetim la gràfica a la dreta i a l'esquerra.

EXEMPLE

Representa la funció $y = sin\ x$.

x	0	$\frac{\pi}{4} = 45°$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4} = 135°$	π	$\frac{5\pi}{4} = 225°$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4} = 315°$	2π
$sin\ x$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0



ACTIVITATS

1 Representa la funció trigonomètrica $y = 2 + sin\ x$.

2 Representa la funció trigonomètrica $y = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

RECONÈIXER FUNCIONS TRIGONOMÈTRIQUES

Nom: Curs: Data:

La funció $y = cos\ x$ té les característiques següents:

- Està definida per a qualsevol valor → Domini $= \mathbb{R}$
- Com que $-1 \leq cos\ x \leq 1$ → Recorregut $= [-1, 1]$
- Es periòdica de període 2π:

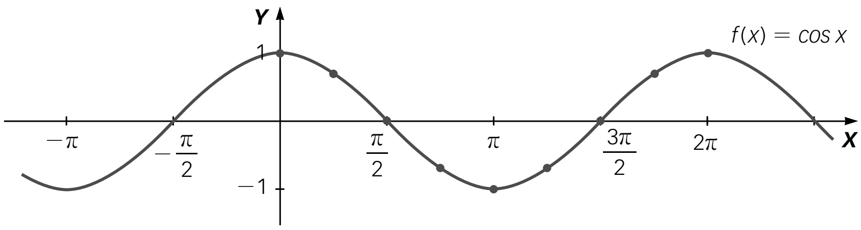
  $cos\ x = cos\ (x + 2k\pi)$, amb $k \in \mathbb{Z}$
- $cos\ (-x) = -cos\ (x)$ → és simètrica respecte de l'origen de coordenades.

Per representar aquesta funció, com que és periòdica de període 2π, construïm una taula per a valors entre 0 i 2π, representem la funció en aquest interval i repetim la gràfica a la dreta i a l'esquerra.

EXEMPLE

Representa la funció $y = cos\ x$.

x	0	$\frac{\pi}{4} = 45°$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4} = 135°$	π	$\frac{5\pi}{4} = 225°$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4} = 315°$	2π
$cos\ x$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1



3 Representa la funció trigonomètrica $y = 2 + cos\ x$.

4 Representa la funció trigonomètrica $y = cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Nom: Curs: Data:

ACTIVITATS

1 Calcula el valor aproximat de $\log_3 \frac{3}{2}$, utilitzant la gràfica de la funció $y = 3^x$.

2 Comprova si el següent parell de funcions és simètric respecte de la recta $y = x$.

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x \text{ i } g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Davant d'aquestes funcions trigonomètriques, $y = cos\ x$ i $y = sin\ x$, respon:

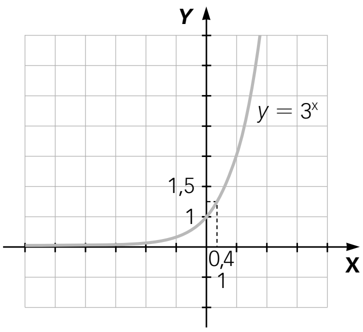
a) Quant val el període de les funcions $y = cos(2x)$ i $y = sin(2x)$?

b) Quant val el període de les funcions $y = cos\left(\frac{x}{2}\right)$ i $y = sin\left(\frac{x}{2}\right)$?

c) Generalitza i calcula el període de les funcions trigonomètriques següents:

$y = sin(nx)$, $y = cos(nx)$, $y = sin\left(\frac{x}{n}\right)$ i $y = cos\left(\frac{x}{n}\right)$

1 Calcula el valor aproximat de $\log_3 \frac{3}{2}$, utilitzant la gràfica de la funció $y = 3^x$.



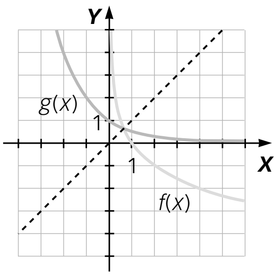
$\log_3 \frac{3}{2} = \log_3 1{,}5 \simeq 0{,}4$

2 Comprova si el següent parell de funcions és simètric respecte de la recta $y = x$.

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x \text{ i } g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

x	−2	−1	0	1	2	3	4
$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$				0	−1	−1,5850	−2
$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	4	2	1	0,5	0,25	0,125	0,0625

Les gràfiques són simètriques respecte de la bisectriu del primer i tercer quadrants.



Davant d'aquestes funcions trigonomètriques, $y = \cos x$ i $y = \sin x$, respon:

a) Quant val el període de les funcions $y = \cos(2x)$ i $y = \sin(2x)$?

b) Quant val el període de les funcions $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ i $y = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$?

c) Generalitza i calcula el període de les funcions trigonomètriques següents:

$y = \sin(nx)$, $y = \cos(nx)$, $y = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ i $y = \cos\left(\frac{x}{n}\right)$

a) El període de la funció $y = \cos(x)$ val $T = 2\pi \rightarrow$ El període de la funció $y = \cos(2x)$ es redueix a la meitat, $T = \pi$.

El període de la funció $y = \sin(x)$ val $T = 2\pi \rightarrow$ El període de la funció $y = \sin(2x)$ es redueix a la meitat, $T = \pi$.

b) El període de la funció $y = \cos(x)$ val $T = 2\pi \rightarrow$ El període de la funció $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ es multiplica per dos, $T = 4\pi$.

El període de la funció $y = \sin(x)$ val $T = 2\pi \rightarrow$ El període de la funció $y = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ es multiplica per dos, $T = 4\pi$.

c) En general, si l'argument està multiplicat per n, la longitud del període queda dividida per n, i, recíprocament, si l'argument està dividit per n, la longitud del període queda multiplicada per n.

RECONÈIXER I DIFERENCIAR ELS CONCEPTES DE POBLACIÓ I MOSTRA

Nom: Curs: Data:

- L'**estadística** és la ciència encarregada d'arreplegar, analitzar i interpretar les dades relatives a un conjunt d'elements.
- La **població** és el conjunt d'elements sobre els quals es vol estudiar un determinat aspecte o característica.
- La **mostra** és una part de la població. És important triar bé la mostra, ja que aquesta ha de ser representativa, és a dir, ha de donar una informació correcta i similar a l'obtinguda si estudiéssim tota la població.
- La **grandària** d'una mostra és el nombre d'elements que la componen.

EXEMPLE

Els resultats a la pregunta: *Com classificaries les desigualtats que actualment hi ha entre homes i dones al nostre país en l'àmbit laboral?*, del sondeig d'opinió sobre «Les dones i l'ocupació», estan recollits en percentatges (%) en la taula següent.

	TOTAL	SEXE	
		Homes	Dones
Molt grans	9	6	13
Bastant grans	45	40	50
Bastant petites	28	32	24
Gairebé inexistents	14	19	9
No sap/No respon	4	3	4

Juntament amb el sondeig d'opinió apareix aquesta fitxa tècnica.

***Àmbit*: territori espanyol, excepte Ceuta i Melilla.**
***Univers*: població espanyola dels dos sexes de 18 anys o més.**
***Grandària de la mostra*: 2 488 entrevistes.**
***Error mostral*: per a un nivell de confiança del 95,5 %, l'error és del $\pm$2 %.**
***Data de realització*: 23-27 de gener de 1997 (Centre d'Investigacions Sociològiques, CIS).**

L'error del $\pm$2% significa que a la resposta de «Molt grans», que és el 9% en la mostra (2488 casos), la resposta en la població seria del 9 $\pm$ 2%; és a dir, entre un 7% i un 11% de les persones respondrien «Molt grans», afirmant-ho en el 95,5% de les estimacions (nivell de confiança).

En els estudis estadístics s'escullen mostres en lloc de poblacions quan aquestes són molt àmplies, per motius econòmics, per la rapidesa a saber-ne els resultats, etc.

ACTIVITATS

1 Fes aquesta mateixa pregunta als teus companys de classe i construeix una taula similar a l'anterior, però sense calcular percentatges, és a dir, apuntant quants companys han donat cada una de les respostes i el seu sexe.

CLASSIFICAR VARIABLES ESTADÍSTIQUES

Nom: Curs: Data:

Una **variable estadística** és qualsevol característica o aspecte dels elements d'una població o d'una mostra que es pot estudiar.

Les variables estadístiques poden ser:

- **Variables quantitatives:** es poden mesurar i s'expressen amb nombres. Al seu torn, poden ser discretes o contínues.
  - Les **variables quantitatives discretes** prenen un nombre determinat de valors.
  - Les **variables quantitatives contínues** poden prendre qualsevol valor comprès entre dos valors donats.
- **Variables qualitatives:** no es poden mesurar i s'expressen amb qualitats o descripcions.

EXEMPLE

Assenyala, en cada cas, quin tipus de variable és i digues si és més convenient estudiar la població o una mostra.

a) L'estatura dels 20 alumnes d'una classe: *variable quantitativa contínua*, i estudiem la *població*.

b) Els efectes d'un nou medicament en l'ésser humà: *variable qualitativa*, i estudiem una *mostra* de la població.

c) La talla de pantalons dels homes d'una comunitat autònoma: *variable quantitativa discreta*, i estudiem una *mostra*.

d) Les aficions esportives dels alumnes d'un institut: *variable qualitativa*, i podem estudiar una *mostra* d'alumnes dels diferents cursos.

e) El color dels cabells dels alumnes d'una classe: *variable qualitativa*, i en aquest cas és convenient estudiar la *població*.

ACTIVITATS

1 Assenyala en cada cas el que correspongui.

VARIABLE	QUANTITATIVA		QUALITATIVA	POBLACIÓ	MOSTRA
	Discreta	Contínua			
Professió del pare					
Nombre de persones que viuen en cada pis d'un edifici					
Nombre de trucades fetes des d'un telèfon diàriament					
Equip de futbol preferit per cada alumne d'una classe					
Temperatures preses al llarg d'una setmana					
El pes de cadascun dels 20 alumnes d'una classe					

CALCULAR LES FREQÜÈNCIES D'UN CONJUNT DE DADES

Nom: Curs: Data:

La **freqüència absoluta**, f_i, d'un conjunt de dades és el nombre de vegades que es repeteix cada valor de la variable, x_i, en el total de les dades.

La **freqüència relativa**, h_i, és el quocient entre la freqüència absoluta i el nombre total de dades.

$$h_i = \frac{f_i}{n}$$

La freqüència relativa és sempre un nombre comprès entre 0 i 1.

La suma de totes les freqüències absolutes és igual al nombre total de dades, n. La suma de totes les freqüències relatives és 1.

Multiplicant la freqüència relativa per 100 obtenim el percentatge (%).

EXEMPLE

Amb les dades de l'exemple de les notes de l'examen de Matemàtiques, construeix una taula de freqüències i percentatges.

En la segona columna col·loquem el còmput, és a dir, el nombre de vegades que apareix cada valor. Aquest còmput es denomina *freqüència absoluta*.

En la tercera columna col·loquem el quocient entre la freqüència absoluta i el nombre total de dades (20). Aquest nombre es denomina *freqüència relativa*.

$h_1 = \frac{1}{20} = 0{,}05$ $h_6 = \frac{3}{20} = 0{,}05$

$h_2 = \frac{1}{20} = 0{,}05$ $h_7 = \frac{3}{20} = 0{,}05$

$h_3 = \frac{1}{20} = 0{,}25$ $h_8 = \frac{2}{20} = 0{,}15$

$h_4 = \frac{1}{20} = 0{,}15$ $h_9 = \frac{2}{20} = 0{,}10$

$h_5 = \frac{5}{20} = 0{,}10$ $h_{10} = \frac{1}{20} = 0{,}05$

En la quarta columna col·loquem el percentatge, que és el resultat de multiplicar per 100 cada valor de la freqüència relativa h_i.

x_i	f_i	h_i	%
1	1	0,05	5
2	1	0,05	5
3	1	0,05	5
4	1	0,05	5
5	5	0,25	25
6	3	0,15	15
7	3	0,15	15
8	2	0,10	10
9	2	0,10	10
10	1	0,05	5
Suma	20	1	100

ACTIVITATS

1 S'ha llançat un dau 20 vegades i s'han obtingut els resultats següents: 2, 3, 5, 4, 2, 4, 6, 5, 5, 1, 2, 3, 1, 4, 1, 5, 4, 6, 3 i 3. Construeix una taula amb les freqüències absolutes i relatives i els percentatges.

CALCULAR LES FREQÜÈNCIES D'UN CONJUNT DE DADES

Nom: Curs: Data:

EXEMPLE

Amb les dades de l'exemple del nombre d'habitants de cada edifici, construeix la taula de freqüències absolutes, relatives i percentatges.

En la primera columna col·loquem els valors de la variable (nombre d'habitants per edifici), agrupats en 6 *intervals* d'amplitud 15; en la segona columna posem la *marca de classe* de cada interval; en la tercera columna indiquem la *freqüència absoluta*; en la quarta, la *freqüència relativa*, i en la cinquena, el *percentatge*.

Interval	x_i	f_i	h_i	%
[69, 84)	76,5	4	4/30 = 0,13	13
[84, 99)	91,5	8	8/30 = 0,27	27
[99, 114)	106,5	8	8/30 = 0,27	27
[114, 129)	121,5	4	4/30 = 0,13	13
[129, 144)	136,5	5	5/30 = 0,17	17
[144, 159)	151,5	1	1/30 = 0,03	3
Suma		30	1	100

2 El pes (en quilos) d'una mostra de 30 individus, escollits a l'atzar, és: 59, 69, 74, 70, 68, 85, 83, 75, 56, 92, 86, 94, 58, 61, 74, 77, 79, 67, 84, 73, 82, 74, 79, 80, 81, 65, 60, 59, 73 i 62. Agrupa les dades en intervals i construeix una taula amb les freqüències absolutes i relatives i els percentatges.

Hem de calcular el recorregut de la variable (pes, en aquest cas). Per fer-ho, observem quins són els valors més petit i més gran.

Mínim = 56 **Màxim** = 94 **Recorregut** = 94 − 56 = 38

Podem prendre 5 intervals d'amplitud 10, ja que $5 \cdot 10 = 50 > 38$.

Interval	x_i	f_i	h_i	%
[50, 60)				
[60, 70)				
[70, 80)				
[80, 90)				
[90, 100)				
Suma				

CONSTRUIR LA TAULA DE FREQÜÈNCIES ACUMULADES

Nom: Curs: Data:

- La **freqüència absoluta acumulada**, $\boldsymbol{F_i}$, d'un valor x_i és la suma de les freqüències, f_i, de tots els valors més petits o iguals que aquest.
- La **freqüència relativa acumulada**, $\boldsymbol{H_i}$, d'un valor x_i és el quocient entre la freqüència absoluta acumulada i el nombre total de dades: $H_i = \frac{F_i}{N}$.

EXEMPLE

Amb les dades de l'exemple de les notes de l'examen de Matemàtiques, construeix una taula de freqüències absolutes acumulades i freqüències relatives acumulades.

Obtenim la freqüència absoluta acumulada de cada valor:

$F_1 = f_1 = 1$

$F_2 = F_1 + f_2 = 1 + 1 = 2$

$F_3 = F_2 + f_3 = 2 + 1 = 3$

$F_4 = F_3 + f_4 = 3 + 1 = 4$

$F_5 = F_4 + f_5 = 4 + 5 = 9$

$F_6 = F_5 + f_6 = 9 + 3 = 12$

$F_7 = F_6 + f_7 = 12 + 3 = 15$

$F_8 = F_7 + f_8 = 15 + 2 = 17$

$F_9 = F_8 + f_9 = 17 + 2 = 19$

$F_{10} = F_9 + f_{10} = 19 + 1 = 20$

Calculem la freqüència relativa acumulada dels distints valors:

$$H_1 = \frac{F_1}{N} = \frac{1}{20} = 0{,}05$$

$$H_2 = \frac{F_2}{N} = H_1 + h_2 = 0{,}05 + 0{,}05 = 0{,}10$$

$$H_3 = \frac{F_2}{N} = H_2 + h_3 = 0{,}10 + 0{,}05 = 0{,}15$$

$$H_4 = \frac{F_4}{N} = H_3 + h_4 = 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}20$$

$$H_5 = \frac{F_5}{N} = H_4 + h_5 = 0{,}20 + 0{,}25 = 0{,}45$$

$$H_6 = \frac{F_6}{N} = H_5 + h_6 = 0{,}45 + 0{,}15 = 0{,}60$$

$$H_7 = \frac{F_7}{N} = H_6 + h_7 = 0{,}60 + 0{,}15 = 0{,}75$$

$$H_8 = \frac{F_8}{N} = H_7 + h_8 = 0{,}75 + 0{,}10 = 0{,}85$$

$$H_9 = \frac{F_9}{N} = H_8 + h_9 = 0{,}85 + 0{,}10 = 0{,}95$$

$$H_{10} = \frac{F_{10}}{N} = H_9 + h_{10} = 0{,}95 + 0{,}05 = 1$$

Dades	Freqüència absoluta (f_i)	Freqüència absoluta acumulada (F_i)	Freqüència relativa (h_i)	Freqüència relativa acumulada (H_i)
11	1	1	0,05	0,05
12	1	2	0,05	0,10
13	1	3	0,05	0,15
14	1	4	0,05	0,20
15	5	9	0,25	0,45
16	3	12	0,15	0,60
17	3	15	0,15	0,75
18	2	17	0,10	0,85
19	2	19	0,10	0,95
10	1	20	0,05	1

CONSTRUIR LA TAULA DE FREQÜÈNCIES ACUMULADES

Nom: Curs: Data:

ACTIVITATS

1 Es llança un dau 20 vegades i s'obtenen els resultats següents.

2, 3, 5, 4, 2, 4, 6, 5, 5, 1, 2, 3, 1, 4, 1, 5, 4, 6, 3 i 3

Construeix la taula de freqüències amb les columnes de les freqüències absolutes i relatives acumulades.

EXEMPLE

Amb les dades de l'exemple dels habitants de cada edifici, construeix una taula de freqüències absolutes i relatives acumulades.

Interval	x_i	f_i	F_i	h_i	%
[69, 84)	76,5	4	4	4/30 = 0,13	0,13
[84, 99)	91,5	8	12	8/30 = 0,27	0,40
[99, 114)	106,5	8	20	8/30 = 0,27	0,67
[114, 129)	121,5	4	24	4/30 = 0,13	0,80
[129, 144)	136,5	5	29	5/30 = 0,17	0,97
[144, 159)	151,5	1	30	1/30 = 0,03	1
Suma		30		1	

2 Amb les dades de l'exemple del pes de 30 persones, completa la taula amb les freqüències absolutes i relatives acumulades.

Interval	x_i	f_i	F_i	h_i	%
[50, 60)	55				
[60, 70)					
[70, 80)					
[80, 90)					
[90, 100)					
Suma					

UTILITZAR I ANALITZAR ELS GRÀFICS ESTADÍSTICS

Nom: Curs: Data:

Els **gràfics** representen la informació que contenen les taules estadístiques. Segons quina sigui la variable, es fa servir un tipus de gràfic o un altre.

VARIABLES DISCRETES

- **Diagrama de barres:** per representar dades quantitatives o qualitatives discretes.
  Sobre l'eix *X* s'assenyalen els valors de la variable i s'alcen barres d'altura igual a la freqüència representada (absoluta, absoluta acumulada, relativa o relativa acumulada).
- El **polígon de freqüències** és una línia poligonal que s'obté en traçar, en el diagrama de barres, una línia des de cada extrem d'una barra fins a l'extrem de la barra següent.

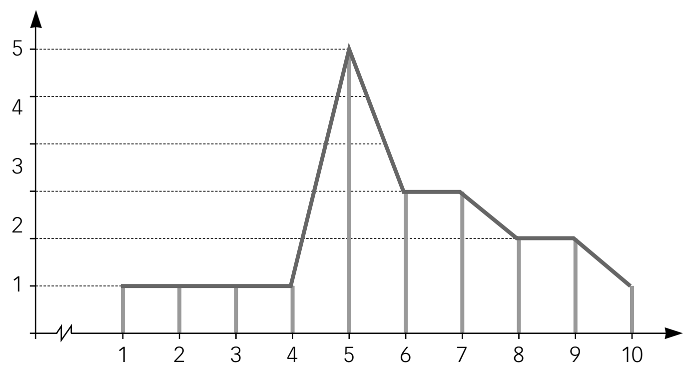
VARIABLES CONTÍNUES

- **Histograma:** per representar variables quantitatives contínues.
  S'assenyalen sobre l'eix horitzontal els extrems dels intervals i s'alcen rectangles d'altura igual que la freqüència que es vol representar.
- El **polígon de freqüències** s'obté en unir els punts mitjans dels costats superiors dels rectangles de l'histograma.

EXEMPLE

Amb les freqüències absolutes de l'exemple de les notes en l'examen de Matemàtiques, construeix el diagrama de barres i el polígon de freqüències.

x_i	f_i
1	1
2	1
3	1
4	1
5	5
6	3
7	3
8	2
9	2
10	1
Suma	20



ACTIVITATS

1 Amb les dades de l'exemple del llançament del dau, construeix el diagrama de barres i el polígon de freqüències acumulades.

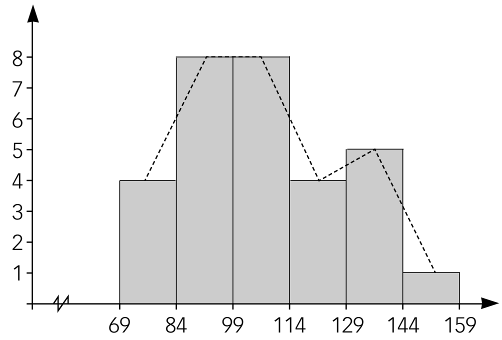
UTILITZAR I ANALITZAR ELS GRÀFICS ESTADÍSTICS

Nom: Curs: Data:

EXEMPLE

Amb les freqüències absolutes de l'exemple dels habitants de cada edifici, construeix l'histograma i el polígon de freqüències.

Interval	x_i	f_i
[69, 84)	76,5	4
[84, 99)	91,5	8
[99, 114)	106,5	8
[114, 129)	121,5	4
[129, 144)	136,5	5
[144, 159)	151,5	1



2 Amb les dades del pes de les 30 persones, construeix l'histograma i el polígon de freqüències.

Interval	x_i	f_i
[50, 60)	55	4
[60, 70)	65	7
[70, 80)	75	10
[80, 90)	85	7
[90, 100)	95	2
Suma		

UTILITZAR I ANALITZAR ELS GRÀFICS ESTADÍSTICS

Nom: Curs: Data:

Gràfic de sectors

Es divideix un cercle en sectors d'angle proporcional a la freqüència absoluta de cada valor de la variable estadística.

EXEMPLE

Amb les freqüències absolutes de l'exemple de les notes en l'examen de Matemàtiques, construeix el diagrama de sectors.

x_i	f_i
1	1
2	1
3	1
4	1
5	5
6	3
7	3
8	2
9	2
10	1
Suma	20

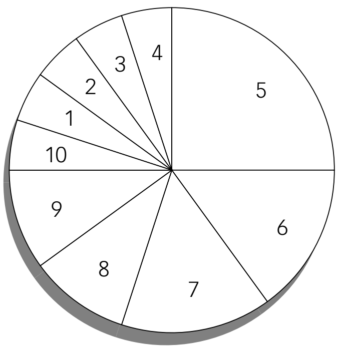
Per calcular l'amplitud de cada sector, apliquem amb cada valor una regla de tres:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } 360° \longrightarrow 20 \text{ casos}\\ x \longrightarrow 1 \text{ cas}\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{360 \cdot 1}{20} = 18°$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } 360° \longrightarrow 20 \text{ casos}\\ x \longrightarrow 5 \text{ casos}\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{360 \cdot 5}{20} = 90°$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } 360° \longrightarrow 20 \text{ casos}\\ x \longrightarrow 3 \text{ casos}\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{360 \cdot 3}{20} = 54°$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } 360° \longrightarrow 20 \text{ casos}\\ x \longrightarrow 2 \text{ casos}\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{360 \cdot 2}{20} = 36°$$



3 Representa en un gràfic de sectors les freqüències de l'exemple dels habitants de cada edifici.

Interval	x_i	f_i
[69, 84)	76,5	4
[84, 99)	91,5	8
[99, 114)	106,5	8
[114, 129)	121,5	4
[129, 144)	136,5	5
[144, 159)	151,5	1

CALCULAR LES MESURES DE CENTRALITZACIÓ D'UN CONJUNT DE DADES

Nom: Curs: Data:

La mitjana, la mediana i la moda són mesures de centralització, ja que reflecteixen la tendència de les dades a concentrar-se al voltant de certs valors.

La **mitjana**, $\overline{x}$, d'un conjunt de dades, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, és: $\overline{x} = \dfrac{x_1f_1 + x_2f_2 + \ldots + x_nf_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}$

Si les dades estan agrupades en intervals, el valor x_i és la marca de classe de cada interval.

EXEMPLE

Calcula la nota mitjana de les notes obtingudes pels 20 alumnes en l'examen de Matemàtiques.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Suma
f_i	1	1	1	1	5	3	3	2	2	1	20
$x_i \cdot f_i$	1	2	3	4	25	18	21	16	18	10	118

$$\overline{x} = \frac{\Sigma x_i f_i}{\Sigma f_i} = \frac{\Sigma x_i f_i}{N} = \frac{118}{20} = 5{,}9$$

ACTIVITATS

1 Determina la mitjana de l'exemple dels habitants de cada edifici d'un carrer.

Interval	x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
[69, 84)	76,5	4	
[84, 99)	91,5	8	
[99, 114)	106,5	8	
[114, 129)	121,5	4	
[129, 144)	136,5	5	
[144, 159)	151,5	1	

2 Calcula la mitjana de l'exemple de les dades del pes de 30 persones.

Interval	x_i	f_i
[50, 60)	55	4
[60, 70)	65	7
[70, 80)	75	10
[80, 90)	85	7
[90, 100)	95	2

CALCULAR LES MESURES DE CENTRALITZACIÓ D'UN CONJUNT DE DADES

Nom: Curs: Data:

- La **mediana** d'un conjunt de dades és el valor tal que, ordenades les dades de manera creixent, la meitat són més petites que aquest valor i l'altra meitat són més grans. Es representa per ***Me***.
- Si el conjunt de dades és un nombre senar, la mediana és el valor central, col·locades les dades de forma creixent.
- Si el conjunt de dades és parell, la mediana és la mitjana dels dos valors centrals.
- La **moda** d'un conjunt de dades és el valor de la variable o l'interval que més es repeteix. Es representa per ***Mo***.
- El valor de la moda pot no ser únic, és a dir, pot haver-hi diversos valors de la variable o intervals que es repeteixin igualment.

EXEMPLE

En l'exemple de l'examen de Matemàtiques, el nombre de notes és parell i la mediana serà:

$$Me = \frac{5+6}{2} = 5{,}5$$

La moda és el valor que més es repeteix: $Mo = 5$.

3 Calcula la mediana i la moda de l'exemple dels habitants de cada edifici, prenent, per fer-ho, les marques de classe.

Interval	x_i	f_i
[69, 84)	76,5	4
[84, 99)	91,5	8
[99, 114)	106,5	8
[114, 129)	121,5	4
[129, 144)	136,5	5
[144, 159)	151,5	1

4 Calcula la mediana i la moda de l'exemple de les dades del pes de 30 persones.

Interval	x_i	f_i
[50, 60)	55	4
[60, 70)	65	7
[70, 80)	75	10
[80, 90)	85	7
[90, 100)	95	2

CALCULAR LES MESURES DE DISPERSIÓ D'UN CONJUNT DE DADES

Nom: Curs: Data:

- Les **mesures de dispersió** són les mesures estadístiques que indiquen el major o menor grau d'agrupament dels valors que formen un conjunt de dades.
- El rang o recorregut, la desviació, la desviació mitjana, la variància i la desviació típica són mesures de dispersió.
- El **rang o recorregut** es calcula com la diferència entre el valor més gran i el més petit de la variable estadística.
- La **desviació respecte a la mitjana** és la diferència entre cada valor de la variable i la mitjana d'aquesta variable. La suma de les desviacions és sempre zero.

EXEMPLE

En una ciutat hi ha dos corals, *A* i *B*, formades per 9 persones cada una, les edats de les quals són:

Coral *A*	10	10	20	30	30	30	40	50	50
Coral *B*	25	25	30	30	30	30	30	35	35

Calcula la mitjana d'edat de cada coral, la mediana, la moda, el recorregut i la desviació.

- La mitjana de cada coral és:

$$\overline{x}_A = \frac{10+10+20+30+30+30+40+50+50}{9} = \frac{270}{9} = 30 \text{ anys}$$

$$\overline{x}_B = \frac{25+25+30+30+30+30+30+35+35}{9} = \frac{270}{9} = 30 \text{ anys}$$

- La mediana és 30 en els dos casos, ja que ocupa el lloc central en cada sèrie.
- La moda és també igual en les dues sèries, 30.

  S'observa que les dues corals tenen les tres mitjanes iguals, però són molt desiguals respecte a les edats. La coral *A* té dos nens de 10 anys i dues persones grans de 50 anys, és a dir, hi ha quatre valors molt allunyats de l'edat mitjana; en canvi, en la coral *B* les edats són més homogènies, ja que totes estan pròximes a la mitjana.

  Si volem tenir en compte aquests aspectes, hem de mesurar el grau de separació o de dispersió de les dades respecte a la mitjana.

- El recorregut de la coral *A* és: $50 - 10 = 40$ anys, mentre que el recorregut de la coral *B* és: $35 - 25 = 10$ anys.
- Per als components de cada coral, les desviacions són:

Coral *A*	10	10	20	30	30	30	40	50	50
$x_i - 30$	−20	−20	−10	0	0	0	10	20	20

Coral *B*	25	25	30	30	30	30	40	35	35
$x_i - 30$	−5	−5	0	0	0	0	0	5	5

Observa que, en els dos casos, la suma de les desviacions és zero.

ACTIVITATS

1 En un examen s'han obtingut les notes següents: 3, 5, 7, 2, 9, 5 i 3. Determina'n el recorregut i la desviació.

CALCULAR LES MESURES DE DISPERSIÓ D'UN CONJUNT DE DADES

Nom: Curs: Data:

- La **desviació mitjana (*DM*)** és la mitjana dels valors absoluts de les desviacions.

$$DM = \frac{\Sigma|x_i - \overline{x}|}{N}$$

Si les dades estan donades amb les seves freqüències, la desviació mitjana és:

$$DM = \frac{\Sigma|x_i - \overline{x}| \cdot f_i}{N}$$

- La **variància** és la mitjana dels valors absoluts de les desviacions. Mesura les desviacions respecte de la mitjana al quadrat.
- La **desviació típica** és l'arrel quadrada de la variància. Es designa amb la lletra σ.

Per a dades simples, la seva fórmula és: $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \overline{x})^2}{N}}$

Per a dades agrupades, la seva fórmula és: $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \overline{x})^2 f_i}{N}}$

EXEMPLE

Calcula la desviació mitjana, la variància i la desviació típica de les dues corals de l'exemple anterior.

En aquest cas, les dades no es donen amb les seves freqüències (la freqüència de cada dada és 1).

- Les desviacions mitjanes són:

$$DM_A = \frac{|-20|+|-20|+|-10|+0+0+0+|10|+|20|+|20|}{9} = \frac{100}{9} = 11{,}11$$

$$DM_B = \frac{|25-30|+|25-30|+0+0+0+0+0+|35-30|+|35-30|}{9} = \frac{20}{9} = 2{,}22$$

S'observa que la desviació mitjana de la coral *A* és més gran que la de la coral *B*.

- Les variàncies i les desviacions típiques de les dues corals són:

$$\text{Variància de la coral } A = \frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 + d_6^2 + d_7^2 + d_8^2 + d_9^2}{9} =$$

$$= \frac{(-20)^2 + (-20)^2 + (-10^2) + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 10^2 + 20^2 + 20^2}{9} =$$

$$= \frac{400 + 400 + 100 + 0 + 0 + 0 + 100 + 400 + 400}{9} = \frac{1800}{9} = 200$$

Desviació típica: $\sigma_A = \sqrt{\text{variància}} = \sqrt{200} = 14{,}14$

$$\text{Variància de la coral } B = \frac{(-5)^2 + (-5)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 5^2 + 5^2}{9} =$$

$$= \frac{25 + 25 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 25 + 25}{9} = \frac{100}{9} = 11{,}11$$

Desviació típica: $\sigma_B = \sqrt{\text{variància}} = \sqrt{11{,}11} = 3{,}33$

S'observa que la desviació típica en la coral *A* és prou més alta que en la coral *B*, és a dir, $\sigma_A > \sigma_B$. Això significa que la dispersió de les edats en la coral *A* és molt més gran que en la coral *B*. La desviació típica augmenta a mesura que s'incrementa la dispersió de les dades.

CALCULAR LES MESURES DE DISPERSIÓ D'UN CONJUNT DE DADES

Nom: Curs: Data:

2 En la taula figuren els resultats obtinguts en una prova de 120 preguntes. Calcula'n la desviació mitjana, la variància i la desviació típica.

Interval	x_i	f_i
[0, 30)	15	12
[30, 60)	45	20
[60, 90)	75	10
[90, 120)	105	7

3 Les alçades (en centímetres) dels alumnes d'una classe de 4t d'ESO es distribueixen segons la taula.

Intervals d'alçades	Freqüències absolutes
[145, 150)	51
[150, 155)	95
[155, 160)	141
[160, 165)	152
[165, 170)	120
[170, 175)	88
[175, 180)	58

Resol.

a) Completa la taula amb les freqüències absolutes acumulades i les freqüències relatives.

b) Dibuixa l'histograma i el polígon de freqüències corresponent.

c) Calcula'n la mitjana aritmètica.

d) Determina'n l'interval modal i pren com a moda la marca de classe corresponent.

e) Calcula'n la mediana.

f) Calcula'n la desviació típica.

(Suggeriment: determina l'interval la freqüència absoluta acumulada F_i *del qual és immediatament superior a la meitat del nombre de dades. Aquest és l'interval en el qual es troba la mediana, i la seva marca de classe es pot prendre com a valor aproximat de la mediana.)*

Nom: Curs: Data:

ACTIVITATS

1 Els salaris, en €, en una empresa són els següents.

Dones: 1 200, 1 300, 1 000, 900, 900, 1 100, 1 200, 1 100, 1 400, 1 200, 1 000, 1 300, 1 200, 1 100, 1 100

Homes: 1 200, 1 300, 1 500, 1 300, 1 400, 900, 1 700, 1 600, 1 400, 1 300, 1 500, 1 300, 1 900, 1 700, 1 200

a) Calcula la distribució de freqüències, la mitjana, la mediana i la desviació típica, de cada grup: homes i dones.

b) Calcula les seves mesures de dispersió.

c) Compara els dos grups. Com ho fas?

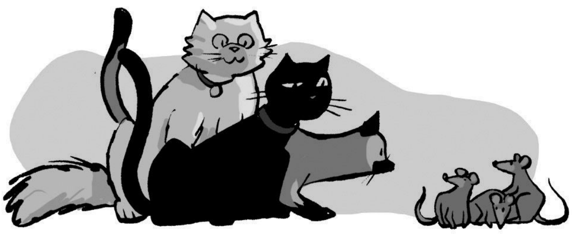
d) Si considerem totes les dades en el mateix grup, quins resultats obtenim?

2 Dos alumnes fan 5 proves de qualificació i obtenen els resultats següents:

Joan: 2 6 5 7 5 Anna: 0 1 9 8 7

Compara les dades, utilitzant la mitjana aritmètica i la desviació típica.

3 Un grup de ratolins té de mitjana dels seus pesos $\overline{x} = 70$ g i desviació típica $\sigma = 20$ g. Un conjunt de gats té de mitjana $\overline{x} = 2{,}5$ kg i desviació típica $\sigma = 20$ g. Compara els dos grups.



1 Els salaris…

a) i b) Dones:

x_i	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
900	2	2	1 800	1 620 000
1 000	2	4	2 000	2 000 000
1 100	4	8	4 400	4 840 000
1 200	4	12	4 800	5 760 000
1 300	2	14	2 600	3 380 000
1 400	1	15	1 400	1 960 000
Total	15		17 000	19 580 000

$\overline{x} = \frac{17\,000}{15} = 1\,133$ Me $= 1\,100$ Mo $= 1\,100$ i $1\,200$

Rang: R = màxim − mínim = 1 400 − 900 = 500

Variància:

$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{N} - \overline{x}^2 = \frac{19\,580\,000}{15} - 1133^2 = 21\,644$

Desviació típica: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 147$

Coeficient de variació: $CV = \frac{\sigma}{\overline{x}} = \frac{147}{1\,133} = 0{,}13 = 13\ \%$

Homes:

x_i	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
900	1	1	900	810 000
1 200	2	3	2 400	2 880 000
1 300	4	7	5 200	6 760 000
1 400	2	9	2 800	3 920 000
1 500	2	11	3 000	4 500 000
1 600	1	12	1 600	2 560 000
1 700	2	14	3 400	5 780 000
1 900	1	15	1 900	3 610 000
Total	15		21 200	30 920 000

Les mesures de centralització són:

$\overline{x} = \frac{21\,200}{15} = 1\,413$ Me $= 1\,400$ Mo $= 1\,300$

Les mesures de dispersió són:

Rang: R = màxim − mínim = 1 900 − 900 = 1 000

Variància:

$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{N} - \overline{x}^2 = \frac{30\,920\,000}{15} - 1413^2 = 64\,764$

Desviació típica: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 254$

Coeficient de variació: $CV = \frac{\sigma}{\overline{x}} = \frac{254}{1413} = 0{,}18 = 18\ \%$

c) En vista dels resultats, podem afirmar que el salari mitjà dels homes és més gran que el de les dones. En els dos casos, la desviació típica és petita amb relació a la mitjana. Això vol dir que les dades estan prou pròximes al respectiu valor mitjà, i estan més pròximes en les dones que en els homes, ja que el coeficient de variació en els homes es més gran que en les dones. En el cas dels homes, les dades estan més disperses que en el cas de les dones.

d)

x_i	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
900	3	3	2 700	2 430 000
1 000	2	5	2 000	2 000 000
1 100	4	9	4 400	4 840 000
1 200	6	15	7 200	8 640 000
1 300	6	21	7 800	10 140 000
1 400	3	24	4 200	5 880 000
1 500	2	26	3 000	4 500 000
1 600	1	27	1 600	2 560 000
1 700	2	29	3 400	5 780 000
1 900	1	30	1 900	3 610 000
Total	30		38 200	50 380 000

$\overline{x} = 1273{,}33$ Me $= 1250$ Mo $= 1\,200$ i $1\,300$

Rang: R = 1 900 − 900 = 1 000

$\sigma^2 = \frac{50\,380\,000}{30} - 1273^2 = 58\,804$ $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 242$

$CV = \frac{\sigma}{\overline{x}} = 0{,}19 = 19\ \%$

2 Dos alumnes fan…

Joan: 2 6 5 7 5 Anna: 0 1 9 8 7

Compara les dades, utilitzant la mitjana aritmètica i la desviació típica.

La mitjana aritmètica i la desviació típica dels dos estudiants són:

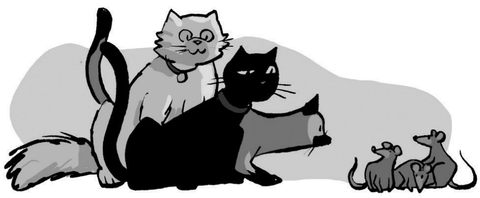
Joan: $\overline{x} = 5$ $\sigma = 1{,}67$ Anna: $\overline{x} = 5$ $\sigma = 3{,}74$

Les dues mitjanes són iguals, però tenen distint significat depenent de les desviacions típiques.

En els dos casos, les mitjanes són iguals, el valor és 5.

No obstant això, en Joan té una desviació típica molt més petita que l'Anna. Això vol dir que en Joan és un alumne constant, ja que les seves notes estan pròximes a la mitjana. Per contra, podem afirmar que l'Anna és una alumna prou irregular, perquè alterna notes molt altes i baixes: totes estan excessivament allunyades de la mitjana.

3 Un grup de ratolins…



Encara que les desviacions típiques siguin iguals, a causa de la diferència que hi ha entre les mitjanes, podem dir que en el grup de ratolins hi ha més dispersió en les dades que en el grup de gats:

$$CV_R = \frac{20}{70} > \frac{20}{2\,500} = CV_G$$

UTILITZAR DIFERENTS MÈTODES DE RECOMPTE

Nom: Curs: Data:

MÈTODE DEL PRODUCTE

El **mètode del producte** és un mètode de recompte que consisteix a descompondre l'experiment en altres experiments més simples i multiplicar el nombre de possibilitats de cada un.

EXEMPLE

Traiem quatre cartes, sense devolució, d'una baralla de 40 cartes. Quants resultats diferents podem obtenir?

- Primera carta → qualsevol de les 40 cartes → 40 possibilitats
- Segona carta → qualsevol de les 39 cartes restants → 39 possibilitats
- Tercera carta → qualsevol de les 38 cartes restants → 38 possibilitats
- Quarta carta → qualsevol de les 37 cartes restants → 37 possibilitats

Podem obtenir: $40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 = 2\,193\,360$ resultats

ACTIVITATS

1 La Neus vol emportar-se de vacances dos llibres i una pel·lícula. Triant entre cinc llibres i vuit pel·lícules, de quantes maneres diferents ho pot fer?

2 De quantes maneres diferents pots col·locar les xifres del nombre 9 432?

3 En un restaurant podem triar entre tres primers plats, tres segons plats, dues postres i quatre begudes. De quantes maneres ho podem fer?

UTILITZAR DIFERENTS MÈTODES DE RECOMPTE

Nom: Curs: Data:

DIAGRAMA D'ARBRE

El **diagrama d'arbre** és un mètode gràfic de recompte que consisteix a marcar, com si fossin les branques en un arbre, les possibilitats que apareixen en cada un dels experiments simples en què es descompon l'experiment. El nombre de possibilitats s'obté comptant les branques finals.

EXEMPLE

L'Olívia té quatre bufandes: vermella, blava, negra i verda. En Natxo té tres barrets: gris, taronja i blanc. De quantes maneres diferents es podran posar un barret i una bufanda cada un si decideixen compartir-los?

Els experiments simples són triar una bufanda i triar un barret. Fem un diagrama d'arbre.

BV < BG — V, BG
BV < BT — V, BT
BV < BB — V, BB

BB < BG — B, BG
BB < BT — B, BT
BB < BB — B, BB

BN < BG — N, BG
BN < BT — N, BT
BN < BB — N, BB

BV < BG — V, BG
BV < BT — V, BT
BV < BB — V, BB

L'Olívia i en Natxo poden triar entre 12 conjunts de barret i bufanda.

4 Sabem que en Pere, l'Albert i l'Àlex han arribat primer, segon i tercer en una prova de natació, però desconeixem en quin ordre. Escriu els possibles resultats amb l'ajuda d'un diagrama d'arbre.

5 Amb els dígits 2, 3 i 4 formem nombres de dues xifres.

a) Quants nombres de dues xifres diferents hi podem formar?

b) Si les xifres es poden repetir, quants nombres hi podem fer?

MANEJAR NOMBRES COMBINATORIS

Nom: Curs: Data:

Donat un nombre natural n, el **factorial de *n*** s'escriu $n!$.

$$\mathbf{n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Es considera que $\mathbf{0! = 1}$.

Donats dos nombres naturals m i n, $m < n$, el **nombre combinatori *n* sobre *m*** s'escriu: $\binom{n}{m}$

$$\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{m}} = \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{m! \cdot (n - m)!}}$$

EXEMPLE

Calcula.

a) $\mathbf{7!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$

b) $\binom{\mathbf{8}}{\mathbf{5}} = \frac{8!}{5! \cdot (8 - 5)!} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$

ACTIVITATS

1 Calcula.

a) $9!$

b) $10! - 8!$

c) $\binom{14}{11}$

d) $\binom{15}{5}$

PROPIETATS DELS NOMBRES COMBINATORIS

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{m} = \binom{n}{n - m} \qquad \binom{n}{m} + \binom{n}{m + 1} = \binom{n + 1}{m + 1}$$

EXEMPLE

Demostra que es compleix la igualtat: $\binom{\mathbf{9}}{\mathbf{6}} + \binom{\mathbf{9}}{\mathbf{7}} = \binom{\mathbf{10}}{\mathbf{7}}$

$$\binom{9}{6} + \binom{9}{7} = \frac{9!}{6! \cdot 3!} + \frac{9!}{7! \cdot 2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 2 \cdot 1} = 84 + 36 = 120$$

$$\binom{10}{7} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

2 Demostra que es compleixen les igualtats següents.

a) $\binom{12}{3} = \binom{13}{4} - \binom{12}{4}$

b) $\binom{10}{4} = \binom{10}{6}$

c) $\binom{123}{0} = 1$

DISTINGIR ENTRE VARIACIONS I PERMUTACIONS

Nom: Curs: Data:

Les **variacions** de n elements presos de m en m, $\boldsymbol{V_{n,\,m}}$, compten els diferents grups de m elements que es poden formar amb els n elements d'un conjunt ($m < n$), sempre que els elements no es puguin repetir i que hi influeixi l'ordre en què els col·loquem.

$$\boldsymbol{V_{n,\,m} = \frac{n!}{(n-m)!}}$$

Les **variacions amb repetició** de n elements, presos de m en m, $\boldsymbol{VR_{n,\,m}}$, són variacions en les quals els elements es poden repetir.

$$\boldsymbol{VR_{n,\,m} = n^m}$$

EXEMPLE

Calcula.

a) Quants nombres de tres xifres diferents es formen amb els dígits senars?

b) I si les xifres es poden repetir?

a) Tenim $n = 5$ elements i els col·loquem en grups de $m = 3$ elements. Hi influeix l'ordre, per exemple, $315 \neq 351$. Les xifres han de ser diferents.

$$V_{5,\,3} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 60 \text{ nombres}$$

b) Tenim $n = 5$ elements i els col·loquem en grups de $m = 3$ elements. Hi influeix l'ordre, per exemple, $315 \neq 351$. Les xifres es poden repetir.

$$VR_{5,\,3} = 5^3 = 125 \text{ nombres}$$

ACTIVITATS

1 S'assigna a cadascun dels 25 alumnes d'una classe un nombre. S'introdueixen en una bossa 25 boles numerades, de les quals en traiem tres. La primera bola que traurem serà per al delegat, la segona per al subdelegat i la tercera per al secretari de la classe. Quants resultats distints es poden obtenir?

2 Una caixa té una bola de cadascun d'aquests colors: vermell, blau, verd i groc. S'extreuen, d'una en una, tres boles i es col·loquen sobre una taula en l'ordre d'extracció.

a) Quantes col·locacions diferents podem tenir si la bola extreta no es retorna a la caixa?

b) I si la bola s'extreu amb devolució?

DISTINGIR ENTRE VARIACIONS I PERMUTACIONS

Nom: Curs: Data:

EXEMPLE

De quantes maneres diferents poden seure vuit persones en vuit butaques del cine?

En les diferents ordenacions importa l'ordre. I com que dues persones no seuen a la mateixa butaca, no hi ha elements repetits. A més, tenim 8 elements.

$$P_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320 \text{ formes}$$

3 En Daniel, la Viviana i en Nicolau volen repartir-se tres llibres distints. De quantes maneres diferents poden fer el repartiment?

4 La Patrícia té sis postals distintes que vol enviar a sis amics. De quantes maneres diferents les pot enviar?

5 Amb les xifres del nombre 53 412:

a) Quants nombres de tres xifres distintes puc formar?

b) I si es repeteixen les xifres, quants nombres de tres xifres s'obtenen?

c) Calcula els nombres que es poden formar amb les cinc xifres.

6 Fes les operacions següents.

a) $P_9 - P_7$ b) $V_{6,3} + VR_{3,2}$ c) $P_5 - V_{5,3}$

IDENTIFICAR COMBINACIONS DE *n* ELEMENTS PRESOS DE *m* EN *m*

Nom: Curs: Data:

Les **combinacions** de n elements presos de m en m, $\boldsymbol{C_{n,m}}$, s'utilitzen per comptar el nombre de grups diferents, en els quals no importa l'ordre, que es poden formar amb m elements distints, escollits d'un conjunt de n elements.

$$C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

EXEMPLE

Quants punts d'intersecció produeixen 7 rectes coplanàries sabent que no hi ha dues rectes paral·leles ni més de tres rectes que es tallin en el mateix punt?

Tenim $n = 7$ elements i els col·loquem en grups de $m = 2$ elements. No importa l'ordre perquè el punt d'intersecció de les rectes r i s és el mateix que el de les rectes s i r.

$$C_{n,m} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2 \cdot 1 \cdot 5!} = 21 \text{ punts}$$

ACTIVITATS

1 Quantes sumes diferents, de quatre sumands distints d'una sola xifra, es poden formar?

2 Quantes multiplicacions diferents, de quatre factors distints d'una sola xifra, es poden formar amb la condició que el producte no sigui zero?

3 L'Anna, en Borja, la Isabel, la Maria, en Dídac i la Beatriu fan un torneig de tennis. Si tots juguen entre si, quants partits individuals tindrà el torneig?

DISTINGIR ENTRE VARIACIONS, PERMUTACIONS I COMBINACIONS

Nom: Curs: Data:

Per distingir entre variacions, variacions amb repetició, permutacions i combinacions cal respondre a tres preguntes.

<table>
<tr><td rowspan="2">Hi influeix l'ordre?</td><td>No</td><td colspan="5">Combinacions</td></tr>
<tr><td>Sí</td><td rowspan="3">Es treballa amb tots els elements?</td><td>Sí</td><td colspan="3">Permutacions</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td rowspan="2">No</td><td rowspan="2">Es poden repetir els elements?</td><td>Sí</td><td>Variacions amb repetició</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>No</td><td>Variacions</td></tr>
</table>

EXEMPLE

Calcula quantes paraules de tres lletres distintes, tinguin sentit o no, es poden formar amb les lletres de la paraula GOMINA si totes han de començar per *G* i no poden tenir la lletra *A*.

Hi influeix l'ordre? Sí

Es treballa amb tots els elements? No

Es poden repetir els elements? No

Són variacions; com que totes les paraules han de començar per *C* i no poden incloure la lletra *A*, amb $n = 4$ elements presos en grups de $m = 3$.

$$V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \text{ paraules}$$

ACTIVITATS

1 De quantes maneres distintes podem col·locar nou discos en una caixa?

Hi influeix l'ordre?

Es treballa amb tots els elements?

Es poden repetir els elements?

2 La Pilar confecciona jerseis de dos colors. Si té llana de 10 colors diferents, quants tipus de jerseis pot fer?

Hi influeix l'ordre?

Es treballa amb tots els elements?

Es poden repetir els elements?

DISTINGIR ENTRE VARIACIONS, PERMUTACIONS I COMBINACIONS

Nom: Curs: Data:

3 Amb els nombres 1, 2, 3, 4 i 5, quants múltiples de 5 de tres xifres es poden formar?

a) Les xifres han de ser distintes.

b) Les xifres es poden repetir.

4 Un alumne té 9 assignatures en un curs. La nota de cada assignatura pot ser suspens, aprovat, bé, notable o excel·lent. Quants butlletins de notes distints pot obtenir?

5 En una oposició, el temari consta de 75 temes. El dia de l'examen es trien dos temes a l'atzar. Quants exàmens es poden fer?

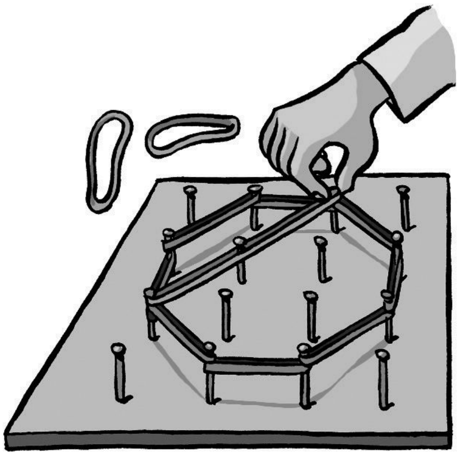
6 Un bar prepara entrepans de tres ingredients. Si disposa de 12 ingredients distints, quantes classes d'entrepans pot preparar?

7 Amb els nombres 1, 2, 3, 4, 5 i 6, quants nombres parells de sis xifres distintes es poden formar?

Nom: Curs: Data:

ACTIVITATS

1 En quants punts es tallen, com a màxim, les diagonals d'un octàgon?



2 En codi Morse s'escriu cada lletra de l'alfabet amb sèries de punts (.) i ratlles (—):

A s'escriu utilitzant 2 símbols → . —

B s'escriu utilitzant 4 símbols → — . . .

Quantes sèries diferents hi ha si utilitzem com a màxim 4 símbols?

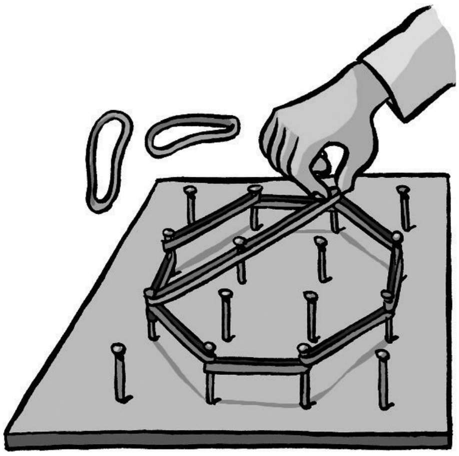
3 Calcula el nombre de polseres diferents de 20 boles de colors que podem elaborar amb boles de 5 colors.

4 Un grup de 12 persones vol fer una excursió en cotxe. Si en cada cotxe viatgen 5 persones:

a) Quants grups diferents es poden formar?

b) En quants d'aquests grups estaran en Carles i la Maria, que són dues de les 12 persones que van a l'excursió?

1 En quants punts es tallen, com a màxim, les diagonals d'un octàgon?



El nombre de diagonals d'un octàgon és el nombre de rectes que uneixen dos dels seus vèrtexs, de les quals cal restar les rectes formades per dos vèrtexs consecutius (costats):

$$C_{8,\,2} - 8 = \frac{8!}{2! \cdot 6!} - 8 = 20$$

El màxim nombre de punts de tall és el nombre de vèrtexs més els possibles talls de les diagonals, dos a dos. Cal considerar que les diagonals que surten d'un mateix vèrtex només es tallen en aquest vèrtex; per tant, hem de restar el nombre de punts de tall de les diagonals:

$$8 + C_{20,\,2} - 8 \cdot C_{5,\,2} = 110$$

2 En codi Morse s'escriu cada lletra de l'alfabet amb sèries de punts (.) i ratlles (—):

A s'escriu utilitzant 2 símbols → . —

B s'escriu utilitzant 4 símbols → — . . .

Quantes sèries diferents hi ha si utilitzem com a màxim 4 símbols?

Com que les sèries poden constar d'1, 2, 3 o 4 símbols, el nombre de sèries diferents és:

$$VR_{2,\,1} + VR_{2,\,2} + VR_{2,\,3} + VR_{2,\,4} = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$$

3 Calcula el nombre de polseres diferents de 20 boles de colors que podem elaborar amb boles de 5 colors.

Considerant que la disposició de les boles dóna lloc a collars diferents, el nombre de collars distints és:

$$VR_{5,\,20} = 5^{20} \approx 9{,}54 \cdot 10^{13}$$

4 Un grup de 12 persones vol fer una excursió en cotxe. Si en cada cotxe viatgen 5 persones:

a) Quants grups diferents es poden formar?

b) En quants d'aquests grups estaran en Carles i la Maria, que són dues de les 12 persones que van a l'excursió?

a) El nombre de grups de 5 persones distints que es podran formar és:

$$C_{12,\,5} = \frac{12!}{5! \cdot 7!} = 792$$

b) La Maria i en Carles estaran en: $C_{10,\,3} = \dfrac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$ grups diferents.

CLASSIFICAR ELS EXPERIMENTS. OBTENIR L'ESPAI MOSTRAL

Nom: Curs: Data:

- Un **experiment determinista** és aquell experiment del qual podem predir el resultat, és a dir, sabem el que ocorrerà abans de fer-lo.
  Per exemple:
  – *Si posem un recipient amb aigua a escalfar, coneixem que a 100 °C l'aigua bull.*
  – *Si un cotxe circula a 120 km/h i triga 2 hores a fer un trajecte, sabem que haurà recorregut 240 km.*
- Un **experiment aleatori** és aquell del qual **no es pot predir** el resultat, és a dir, que per més vegades que repetim l'experiment en igualtat de condicions, anticipadament no coneixem el resultat que obtindrem.
  Per exemple:
  – *Si llancem una moneda a l'aire, no podem predir si sortirà cara o creu.*
  – *Si llancem un dau de parxís, no podem saber el nombre que sortirà.*

ACTIVITATS

1 Classifica aquests experiments. En cas que siguin aleatoris, escriu un possible resultat.

Experiment	Determinista	Aleatori	
Llançar una moneda a l'aire		x	Treure cara
Elevar un nombre al quadrat			
Treure una carta d'una baralla espanyola			
Mesurar la temperatura a què es congela l'aigua			
En tirar un dau de parxís, treure un nombre més gran que 4			

- L'**espai mostral** és el conjunt format per tots els resultats possibles d'un experiment aleatori. Es representa per *E*.
- Cadascun dels resultats possibles s'anomena **esdeveniment elemental**.

EXEMPLE

Experiment	Espai mostral	Esdeveniments elementals
Llançar a l'aire una moneda	$E = \{\text{cara, creu}\}$	cara (*c*) i creu (*x*)
Llançar un dau de parxís	$E = \{1, 2, 3, 4, 5 \text{ i } 6\}$	1, 2, 3, 4, 5 i 6
	↑ Tots els resultats possibles	↑ Cadascun dels resultats possibles

2 Indica quin és l'espai mostral de l'experiment següent: determinar la suma dels punts obtinguts en llançar a l'aire dos daus de parxís.

OPERAR AMB ESDEVENIMENTS

Nom: Curs: Data:

Una **operació entre esdeveniments** d'un espai mostral ens permet obtenir un altre esdeveniment del mateix espai mostral. Les dues operacions més importants són la unió i la intersecció d'esdeveniments.

- **Unió d'esdeveniments:** la unió de dos esdeveniments A i B està formada pels elements (esdeveniments elementals) que estan en qualsevol dels esdeveniments A o B:

  $$A \cup B = A \text{ unió } B$$

- **Intersecció d'esdeveniments:** la intersecció de dos esdeveniments A i B està formada pels elements (esdeveniments elementals) comuns als esdeveniments A i B:

  $$A \cap B = A \text{ intersecció } B$$

- Quan dos esdeveniments no tenen cap esdeveniment elemental en comú es diu que són **incompatibles**:

  $$A \cap B = \emptyset$$

- Quan dos esdeveniments tenen algun esdeveniment elemental en comú es diu que són **compatibles**:

  $$A \cap B \neq \emptyset$$

- Donat un esdeveniment A, l'esdeveniment **contrari** $\overline{A}$, està format pels esdeveniments elementals de l'espai mostral que no estan en A.

EXEMPLE

En l'experiment consistent a llançar un dau, considera els esdeveniments:

A = «Obtenir un nombre més petit o igual que 5» = {1, 2, 3, 4, 5}
B = «Obtenir un nombre parell» = {2, 4, 6}

a) Escriu l'esdeveniment unió, format per tots els esdeveniments elementals de A i B.

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

b) Escriu l'esdeveniment intersecció, format per tots els esdeveniments comuns de A i B.

$$A \cap B = \{2, 4\}$$

c) Escriu l'esdeveniment contrari de A, format per tots els esdeveniments elementals de l'espai mostral que no estan en A.

$$\overline{A} = \{6\}$$

d) Escriu l'esdeveniment contrari de B, format per tots els esdeveniments elementals de l'espai mostral que no estan en B.

$$\overline{B} = \{1, 3, 5\}$$

Observa que la unió d'un esdeveniment i el seu contrari és sempre l'espai mostral.

$$A \cup \overline{A} = E$$

ACTIVITATS

1 Considera l'experiment de llançar un dau de parxís i els esdeveniments: A = «Sortir un nombre parell» i B = «Sortir un nombre primer». Escriu els esdeveniments A i B, i calcula els esdeveniments següents.

$A = \{\_\_\_, \_\_\_, \_\_\_\}$ $B = \{\_\_\_, \_\_\_, \_\_\_\}$

a) $A \cup B =$

b) $\overline{A} =$

c) $A \cup B =$

d) $\overline{A} \cap B =$

e) $A \cap B =$

f) $\overline{B} =$

g) $A \cup \overline{B} =$

h) $A \cap \overline{B} =$

OPERAR AMB ESDEVENIMENTS

Nom: Curs: Data:

2 D'una baralla espanyola de 40 cartes s'extreu una carta i es consideren els esdeveniments següents.

A = «Sortir un as»

B = «Sortir bastos»

C = «No sortir 7»

D = «Sortir una figura».

Assenyala si els parells d'esdeveniments són compatibles, incompatibles o contraris.

Esdeveniment	Compatibilitat		Contraris	
	Compatibles	Incompatibles	Sí	No
A i B				
B i C				
A i D				
B i D				

3 En una bossa hi ha deu boles numerades de l'1 al 10. Es treu una bola i es consideren els esdeveniments.

A = «Treure un nombre parell»

B = «Treure un nombre primer»

C = «Treure un nombre més gran que 7»

Escriu els esdeveniments següents.

a) $A = \{\_\_\_\_\_\_\}$

b) $B = \{\_\_\_\_\_\_\}$

c) $C = \{\_\_\_\_\_\_\}$

d) $\overline{A} = \{\_\_\_\_\_\_\}$

e) $\overline{B} = \{\_\_\_\_\_\_\}$

f) $\overline{C} = \{\_\_\_\_\_\_\}$

g) $A \cup B = \{\_\_\_\_\_\_\}$

h) $A \cap B = \{\_\_\_\_\_\_\}$

i) $A \cup C = \{\_\_\_\_\_\_\}$

j) $A \cap C = \{\_\_\_\_\_\_\}$

k) $\overline{A} \cup B = \{\_\_\_\_\_\_\}$

l) $\overline{A} \cap C = \{\_\_\_\_\_\_\}$

4 Es llancen dos daus de parxís i es consideren aquests esdeveniments.

A = «Suma parella»

B = «Suma més petita que 9»

C = «Suma més gran que 10»

Escriu els esdeveniments següents.

a) $A = \{\_\_\_\_\_\_\}$

b) $B = \{\_\_\_\_\_\_\}$

c) $C = \{\_\_\_\_\_\_\}$

d) $\overline{A} = \{\_\_\_\_\_\_\}$

e) $\overline{B} = \{\_\_\_\_\_\_\}$

f) $\overline{C} = \{\_\_\_\_\_\_\}$

g) $A \cup B = \{\_\_\_\_\_\_\}$

h) $A \cap B = \{\_\_\_\_\_\_\}$

i) $A \cup C = \{\_\_\_\_\_\_\}$

j) $A \cap C = \{\_\_\_\_\_\_\}$

k) $\overline{A} \cup B = \{\_\_\_\_\_\_\}$

l) $\overline{A} \cap C = \{\_\_\_\_\_\_\}$

OBTENIR LA FREQÜÈNCIA ABSOLUTA I LA FREQÜÈNCIA RELATIVA D'UN ESDEVENIMENT

Nom: Curs: Data:

- La **freqüència absoluta (f_i)** d'un esdeveniment és el nombre de vegades que apareix aquest esdeveniment quan es repeteix un experiment aleatori n vegades.
- La **freqüència relativa (h_i)** d'un esdeveniment és el quocient entre la seva freqüència absoluta i el nombre de vegades que s'ha repetit l'experiment: $h_i = \dfrac{f_i}{n}$

EXEMPLE

Hem llançat un dau 120 vegades i hem obtingut els resultats que figuren en la taula.

Cara	1	2	3	4	5	6	TOTAL
f_i	18	21	19	18	23	20	120
h_i	0,15	0,18	0,16	0,15	0,19	0,17	1

El nombre de vegades que apareix cada cara és la seva *freqüència absoluta*.

La *freqüència relativa* s'obté dividint la freqüència absoluta entre el nombre de vegades que es repeteix l'experiment.

ACTIVITATS

1 Es llancen dos daus de parxís simultàniament 120 vegades i s'anota cada vegada la suma de les dues puntuacions obtingudes. Els resultats apareixen en la taula següent.

Cara	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_i	3	8	10	12	18	19	16	13	11	5	5
h_i											

a) Completa la taula, calculant les freqüències relatives.

b) Es consideren els esdeveniments: A = «Nombre múltiple de 5», B = «Nombre parell», C = «Nombre més gran que 6». Determina les freqüències relatives de A, B i C.

$A = \{5, 10\}$ $h_A = h_5 + h_{10} =$ ________________ = ________

$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ $h_B = h_2 + h_4 + h_6 + h_8 + h_{10} =$ ________________ = ________

$C = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ $h_C = h_7 + h_8 + h_9 + h_{10} + h_{11} + h_{12} =$ ________________ = ________

c) Calcula la freqüència relativa de $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$ i $A \cap C$.

$A \cup B = \{5, 10\} \cup \{2, 4, 6, 8, 10\} = \{2, 4, 5, 6, 8, 10\}$

$h_{A \cup B} =$

$A \cap B =$ $A \cap C =$

$h_{A \cap B} =$ ________________ $h_{A \cap C} =$ ________________

$A \cup C =$ $B \cup C =$

$h_{A \cup C} =$ ________________ $h_{B \cup C} =$ ________________

CALCULAR LA PROBABILITAT D'UN ESDEVENIMENT

Nom: Curs: Data:

REGLA DE LAPLACE

Quan tots els esdeveniments elementals d'un experiment aleatori són **equiprobables**, la probabilitat d'un esdeveniment A és el quocient del nombre de casos favorables a l'esdeveniment i el nombre de casos possibles. Aquesta expressió és la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{\text{nombre de casos favorables}}{\text{nombre de casos possibles}}$$

Les propietats d'aquesta regla són:

a) La probabilitat d'un esdeveniment és un nombre comprès entre 0 i 1.

b) La probabilitat d'un esdeveniment impossible és 0. La probabilitat de l'esdeveniment segur és 1.

c) La suma de les probabilitats d'un esdeveniment A i el seu contrari $\overline{A}$ és igual a 1:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

d) La suma de les probabilitats de tots els esdeveniments elementals associats a un experiment aleatori és 1. Per exemple, en el llançament d'un dau, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

e) Donats dos esdeveniments A i B de l'espai mostral E:

- Si són **incompatibles**: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Si són **compatibles**: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

EXEMPLE

En una urna hi ha 3 boles vermelles, 2 boles blanques i 4 boles blaves. Si extraiem una bola, calcula:

a) La probabilitat que sigui vermella.

b) La probabilitat que no sigui blanca.

c) La probabilitat que sigui vermella o blava.

d) La probabilitat que sigui blava o blanca.

a) Denominem els esdeveniments: R = «Treure bola vermella», B = «Treure bola blanca» i A = «Treure bola blava». Aplicant-hi la regla de Laplace, la probabilitat que la bola que surti sigui vermella és:

$$P(R) = \frac{\text{nombre de casos favorables}}{\text{nombre de casos possibles}} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

b) La probabilitat que la bola no sigui blanca (esdeveniment $\overline{B}$) és:

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{2}{10} = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$$

c) La probabilitat que la bola sigui vermella o blava és l'esdeveniment $R \cup A$.

Com que treure bola vermella o blava són esdeveniments incompatibles (la bola és vermella o blava, però no pot ser vermella i blava alhora), la probabilitat és la suma de les dues probabilitats:

$$P(R \cup A) = P(R) + P(A) = \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{7}{10} = 0{,}7$$

d) Com que treure bola blava o blanca són esdeveniments incompatibles, la probabilitat demanada és:

$$P(B \cup A) = P(B) + P(A) = \frac{2}{10} + \frac{4}{10} = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

CALCULAR LA PROBABILITAT D'UN ESDEVENIMENT

Nom: Curs: Data:

ACTIVITATS

1 Llancem dos daus de parxís i sumem els punts obtinguts. Com que la probabilitat de treure qualsevol nombre en cada dau és la mateixa per ser esdeveniments equiprobables, calcula:

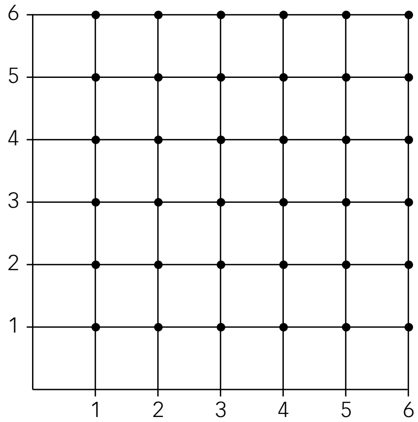
a) L'espai mostral, *E*.

b) La probabilitat que la suma sigui 6.

c) La probabilitat que la suma no sigui 6.

d) La probabilitat que la suma sigui més gran que 10 (la suma de la probabilitat que sigui 11 i la probabilitat que sigui 12).

a) L'espai mostral està format per totes les possibles combinacions de les puntuacions dels dos daus. Les representem sobre un parell d'eixos, i cada combinació és un d'aquests punts.



2 Una bossa conté 4 boles vermelles, 6 boles verdes i 3 boles grogues. Es treuen sense reemplaçament 2 boles, de les quals la primera és verda. Calcula la probabilitat que la segona bola sigui:

a) Groga

b) Vermella

c) Verda

d) Vermella o verda

3 Si l'extracció es fa amb devolució, quines són llavors les probabilitats anteriors?

CALCULAR PROBABILITATS EN EXPERIMENTS COMPOSTOS

Nom: Curs: Data:

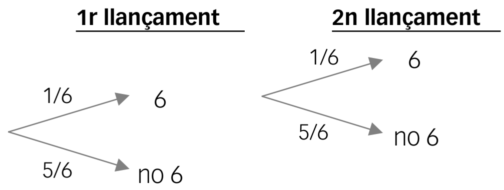
La probabilitat d'un experiment compost es calcula a partir de les probabilitats dels esdeveniments simples que el formen.

EXEMPLE

Quina és la probabilitat de treure dos nombres 6 en llançar dos daus de parxís?

Una forma de resoldre el problema és aplicar-hi directament la regla de Laplace: de les 36 combinacions possibles que es poden donar en tirar dos daus, únicament és favorable l'esdeveniment (6, 6): $P\,(6, 6) = \frac{1}{36}$

Una altra manera de resoldre els problemes de probabilitats compostes és construir un diagrama d'arbre.



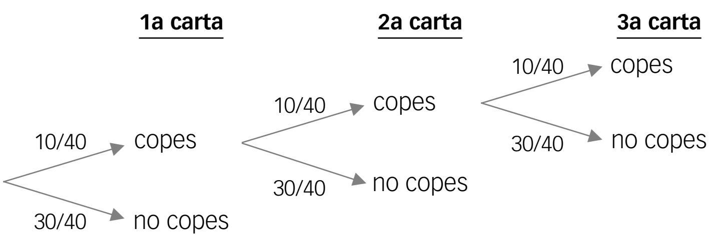
$$P\,(6, 6) = P\,(6) \cdot P\,(6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

ACTIVITATS

1 Calcula la probabilitat de treure tres cartes de copes, en treure tres cartes d'una baralla espanyola.

a) Tornant la carta a la baralla. b) Sense tornar-la a la baralla.

a) Formem el diagrama en arbre, tenint en compte que el nombre de cartes contingudes en la baralla són sempre 40, ja que en aquest cas es tornen.



$$P\,(\text{copes, copes, copes}) = \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$$

b) Forma primer el diagrama d'arbre, tenint en compte que el nombre de cartes contingudes en la baralla disminueix cada vegada, ja que en aquest cas no es tornen.

CALCULAR PROBABILITATS EN EXPERIMENTS COMPOSTOS

Nom: Curs: Data:

2 En una classe hi ha 18 nois i 22 noies. Seleccionats a l'atzar dos alumnes, construeix un diagrama d'arbre i calcula:

a) La probabilitat que siguin dos nois.

b) La probabilitat que siguin dues noies.

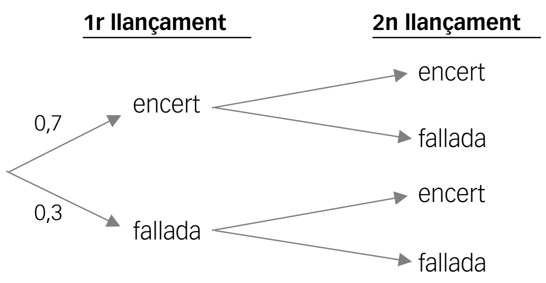
c) La probabilitat que siguin un noi i una noia.

3 Un jugador de bàsquet llança dos tirs lliures. Sabent que sol encertar el 70 % dels tirs que llança i que en falla el 30 %, construeix un diagrama d'arbre i calcula:

a) La probabilitat que encerti els dos tirs.

b) La probabilitat que només n'encerti un.

c) La probabilitat que no n'encerti cap.

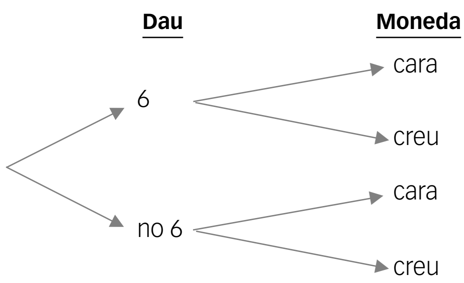


4 Llancem alhora un dau i una moneda. Construeix un diagrama d'arbre i calcula:

a) La probabilitat que surtin un 6 i cara.

b) La probabilitat que no surtin un 6 i creu.

c) La probabilitat que no surtin un 6 i cara.



CALCULAR PROBABILITATS CONDICIONADES

Nom: Curs: Data:

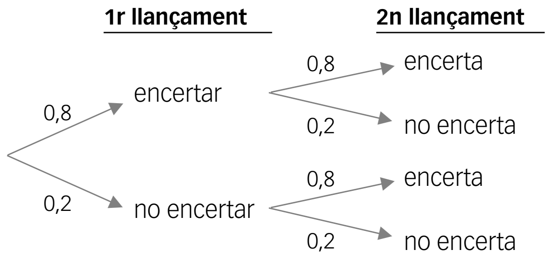
- Un esdeveniment *B* està condicionat per un altre esdeveniment *A*, i s'expressa *B/A* quan sabem que ha tingut lloc l'esdeveniment *A*.
- La probabilitat que tingui lloc $A \cap B$ és igual a la probabilitat que tingui lloc l'esdeveniment *A*, multiplicada per la probabilitat que tingui lloc l'esdeveniment *B* condicionat a *A*.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

EXEMPLE

El marcador d'un partit de bàsquet entre els equips *A* i *B* està en 80-81, quan falta que un jugador de l'equip *A* llanci dos tirs lliures. Si sol encertar el 80 % dels llançaments, quina serà la probabilitat que encerti els dos tirs i guanyi *A*? I que falli els dos tirs i guanyi *B*? I que n'encerti un i quedin empatats?

Construïm el corresponent diagrama d'arbre:



Perquè guanyi l'equip *A* és necessari encertar el segon llançament, sempre que s'hagi encertat el primer. Això s'expressa així:

$$P(1r \cap 2n) = P(1r) \cdot P(2n/1r)$$

Suposem que la probabilitat d'encertar el 2n llançament és independent del que hagi passat en el 1r llançament, i val igual que en el primer, 80 % = 0,8. En aquest cas resulta que:

$$P(1r \cap 2n) = P(1r) \cdot P(2n/1r) = P(1r) \cdot P(2n) = 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}64$$

Hi ha un 64 % de probabilitat que guanyi l'equip *A*.

La probabilitat que falli els dos llançaments serà:

$$P(\text{no } 1r \cap \text{no } 2n) = P(\text{no } 1r) \cdot P(\text{no } 2n/\text{no } 1r) = P(\text{no } 1r) \cdot P(\text{no } 2n) = 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$$

La probabilitat que falli un dels dos llançaments és:

$$P(\text{sí } 1r/\text{no } 2n) + P(\text{no } 1r/\text{sí } 2n) = 0{,}8 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}16 + 0{,}16 = 0{,}32$$

- Dos esdeveniments *A* i *B* són **independents** si la realització de *A* no condiciona la probabilitat de *B*:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(A) \cdot P(B)$$

- Dos esdeveniments *A* i *B* són **dependents** si la realització de *A* condiciona la probabilitat de *B*:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

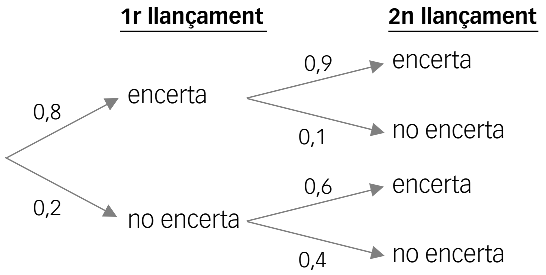
ACTIVITATS

1 En treure una carta d'una baralla espanyola i llançar una moneda, quina és la probabilitat de treure copes i creu? Són esdeveniments dependents o independents?

CALCULAR PROBABILITATS CONDICIONADES

Nom: Curs: Data:

2 En l'exemple anterior, la probabilitat d'encertar el segon llançament és distinta segons que s'hagi encertat o no el primer llançament. Si ha encertat el primer, la probabilitat del segon llançament és del 90%; però si ha fallat el primer, la probabilitat del segon llançament és del 60%. Calcula les probabilitats que guanyi A, que guanyi B o que es produeixi un empat.



3 En un club de tennis hi ha 200 socis, dels quals 80 són dones. D'aquestes, 10 són menors d'edat, mentre que entre els homes hi ha 70 menors d'edat. Calcula la probabilitat que, triat un soci a l'atzar:

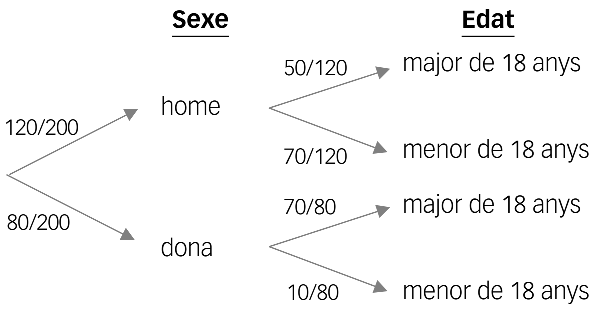
a) Sigui home.

b) Sigui dona i major d'edat.

c) Sigui home i menor d'edat.

d) Sigui major d'edat (home o dona).

e) Sigui menor d'edat (home o dona).



FER TAULES DE CONTINGÈNCIA

Nom: Curs: Data:

Una altra manera de resoldre els problemes de probabilitat d'esdeveniments simples i compostos és a partir d'una taula de contingència.

EXEMPLE

En una colla formada per 12 noies i 8 nois es formen dos grups, un per anar al cine i l'altre per anar al futbol. Per anar al futbol s'apunten 2 nois i 9 noies. Triat un dels 20 amics a l'atzar:

a) Quina és la probabilitat que sigui noia?

b) Quina és la probabilitat que sigui noia i vagi al futbol?

c) I la probabilitat que sigui noi i vagi al cine?

Amb les dades de l'enunciat construïm una taula de doble entrada:

	Nois	Noies	TOTAL
Van al futbol	9	2	11
Van al cine	3	5	9
TOTAL	12	8	20

a) La probabilitat que sigui noia l'obtenim dividint el total de noies (12) entre el total d'amics (40):

$$P\text{ (noia)} = \frac{12}{40} = 0{,}3$$

b) Per calcular la probabilitat que sigui noia i vagi al futbol, observem la taula:

$$P\text{ (noia i anar al futbol)} = \frac{9}{40} = 0{,}225$$

c) La probabilitat que sigui noi i vagi al cine és:

$$P\text{ (noi i anar al cine)} = \frac{6}{40} = 0{,}15$$

ACTIVITATS

1 Resol l'activitat 3 de la pàgina anterior construint una taula de contingència.

	Homes	Dones	TOTAL
Menors de 18 anys	70	50	120
Majors de 18 anys	10	70	80
TOTAL	80	120	209

FER TAULES DE CONTINGÈNCIA

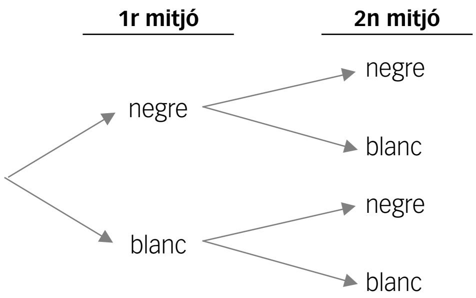
Nom: Curs: Data:

2 En un calaix hi ha 16 mitjons negres i 12 mitjons blancs. Calcula, construint un diagrama d'arbre, la probabilitat que, en treure dos mitjons a l'atzar:

a) Els dos siguin negres.

b) En surti un de cada color.

c) Els dos siguin blancs.



3 En una classe hi ha 16 noies i 14 nois. En preguntar-los qui creuen que guanyarà el partit Barcelona-Reial Madrid, 9 noies responen que l'equip guanyador serà el Barcelona i 6 nois creuen que guanyarà el Reial Madrid.
Triat un nombre qualsevol a l'atzar, calcula la probabilitat de:

a) Ser noia i partidària del Barcelona.

b) Ser noi i partidari del Reial Madrid.

4 En un banquet hi ha 28 homes i 32 dones. En triar entre postres i cafè, prenen postres 15 homes i 20 dones.
Després de triar una persona a l'atzar, determina la probabilitat que:

a) Sigui dona i prengui cafè.

b) Prengui postres (indistintament que sigui home o dona).

Nom: Curs: Data:

ACTIVITATS

1 En Lluís i en Joan han d'ordenar l'habitació que comparteixen. En Lluís posa en una bossa 3 boles vermelles, 2 de verdes i 1 de blava, i proposa al seu germà treure'n una. Si és vermella, ordena en Joan, i si és blava, ordena ell.

a) Quina és la probabilitat que surti bola vermella? I que surti bola blava?
b) És just el que proposa en Lluís?
c) En Joan no accepta el tracte i proposa que si surt vermella ordena ell, i si surt blava o verda ordena en Lluís. És just aquest tracte? Per què?

2 En un concurs televisiu, el presentador ensenya al concursant tres portes tancades, en les quals hi ha un cotxe i dues cabres. El concursant tria una porta i el presentador obre una de les altres portes i apareix una cabra. Aleshores pregunta al concursant si vol canviar la resposta. Què hauria de fer el concursant?

3 En una classe de 4t d'ESO s'han d'escollir representants per parlar amb el Consell Escolar i organitzar una festa de final de curs i una excursió. A la classe hi ha 15 nois i 15 noies. Si s'escullen 3 membres a l'atzar per formar la comissió:

a) Calcula la probabilitat que la comissió estigui formada per 3 noies.
b) Calcula la probabilitat que la formin 2 nois i 1 noia.
c) Si la primera persona escollida ha resultat ser una noia, quina és la probabilitat que hi hagi 2 noies al grup?
d) Si la primera persona escollida és un noi, quina és la probabilitat que hi hagi 2 noies?
e) Quina és la probabilitat que tots els representants siguin nois?

4 Indica un experiment on tots els esdeveniments siguin elementals.

1 En Lluís i en Joan han d'ordenar l'habitació que comparteixen. En Lluís posa en una bossa 3 boles vermelles, 2 de verdes i 1 de blava, i proposa al seu germà treure'n una. Si és vermella, ordena en Joan, i si és blava, ordena ell.

a) Quina és la probabilitat que surti bola vermella? I que surti bola blava?
b) És just el que proposa en Lluís?
c) En Joan no accepta el tracte i proposa que si surt vermella ordena ell, i si surt blava o verda ordena en Lluís. És just aquest tracte? Per què?

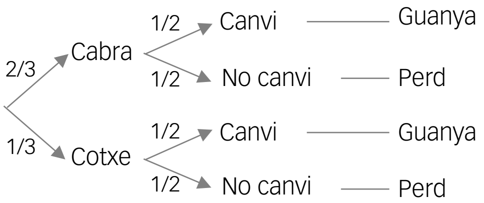
a) $P(\text{roja}) = \dfrac{3}{6} = 0{,}5 \qquad P(\text{blava}) = \dfrac{1}{6} = 0{,}167$

b) No és just perquè hi ha més probabilitats que surti bola vermella.

c) $P(\text{verda o blava}) = P(\text{verda}) + P(\text{blava}) =$
$$= \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = 0{,}5$$

El tracte que proposa en Joan és just, ja que els dos esdeveniments tenen la mateixa probabilitat.

2 En un concurs televisiu, el presentador ensenya al concursant tres portes tancades, en les quals hi ha un cotxe i dues cabres. El concursant tria una porta i el presentador obre una de les altres portes i apareix una cabra. Aleshores pregunta al concursant si vol canviar la resposta. Què hauria de fer el concursant?

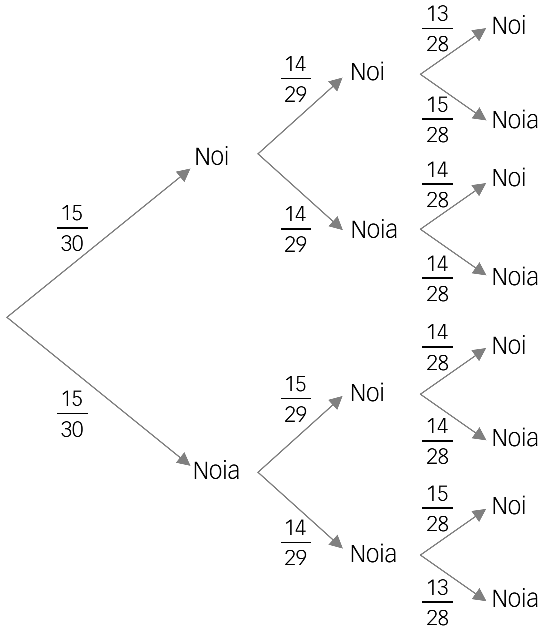


$$P(\text{cotxe/canvi}) = \frac{P(\text{cotxe} \cap \text{canvi})}{P(\text{canvi})} = \frac{\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

El concursant hauria de canviar.

3 En una classe de 4t d'ESO s'han d'escollir representants per parlar amb el Consell Escolar i organitzar una festa de final de curs i una excursió. A la classe hi ha 15 nois i 15 noies. Si s'escullen 3 membres a l'atzar per formar la comissió:

a) Calcula la probabilitat que la comissió estigui formada per 3 noies.
b) Calcula la probabilitat que la formin 2 nois i 1 noia.
c) Si la primera persona escollida ha resultat ser una noia, quina és la probabilitat que hi hagi 2 noies al grup?
d) Si la primera persona escollida és un noi, quina és la probabilitat que hi hagi 2 noies?
e) Quina és la probabilitat que tots els representants siguin nois?



4 Indica un experiment on tots els esdeveniments siguin elementals.

Resposta oberta. Per exemple:

El llançament d'una moneda.

El seu espai mostral està format per dos esdeveniments: «Sortir cara» i «Sortir creu».

En aquest cas, l'esdeveniment no elemental és l'esdeveniment segur.