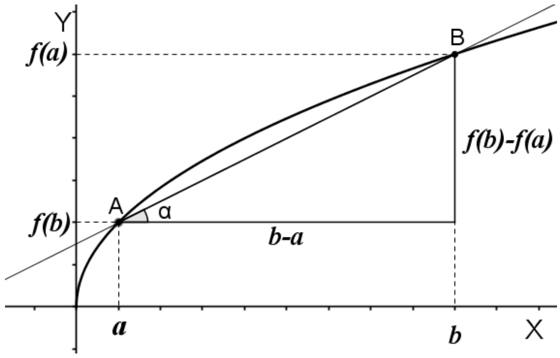
1. DERIVADES

Taxa de variació mitjana

La **taxa de variació mitjana d'una funció $y = f(x)$ en l'interval $[a,b]$** es defineix com el quocient entre la variació de f (increment de y) i la de x (increment de x) en l'interval $[a,b]$ (ens indica la variació de y respecte de x). Es representa amb $TVM_{[a,b]}$.



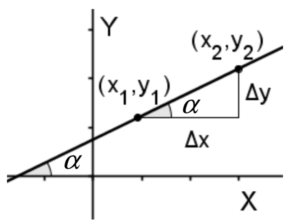
$$TVM_{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

La taxa de variació mitjana de f en l'interval $[a,b]$ coincideix amb el pendent de la recta que uneix els punts A$(a, f(a))$ i B$(b, f(b))$, m_{AB}, i mesura l'increment mitjà de y quan x s'incrementa una unitat, entre A i B. Així, a l'hora d'interpretar el resultat de la $TVM_{[a,b]}$, hem de tenir en compte que és un valor mitjà.

$$TVM_{[a,b]} = m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha$$

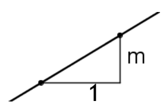
Nota: Recordem la definició de **pendent de la recta:**

El **pendent m d'una recta** es defineix com la tangent de l'angle que forma la recta amb l'eix OX. Si la recta és obliqua, talla l'eix OX i el divideix en dues parts. Per calcular el pendent, prenem l'angle que forma la recta amb la part dreta de l'eix OX, mesurat en sentit directe des de l'eix 0X.



Donats dos punts qualssevol de la recta, el pendent és el quocient de l'increment (variació) de l'ordenada (Δy) entre l'increment de l'abscissa (Δx). Així, el pendent indica l'increment de l'ordenada quan l'abscissa s'incrementa en una unitat:

$$m = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{increment de l'ordenada}}{\text{increment de l'abscissa}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Exemples:

1. Durant un cert dia, les temperatures a la ciutat de Girona van ser les següents:

Hora	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Tª en ºC	9	10	12	13	16	17	18	20	23	23	22	21	19	17	16

Quina és la taxa de variació mitjana de la temperatura entre les 7h i les 17h?

y = Tª en ºC

x = Hores

$$\boldsymbol{TVM}_{[7,17]} = \frac{f(17)-f(7)}{17-7} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{22-9}{17-7} = \frac{13}{10} = \boxed{1{,}3\,^{\circ}\text{C/h}}$$

Aquest resultat significa que, de mitjana, la temperatura ha augmentat 1,3ºC cada hora entre les 7 h i les 17 h. Aquest és **l'augment mitjà per hora**, no l'augment real. En realitat, hi ha hores que ha augmentat 1ºC, altres que ha augmentat 2ºC i altres que ha augmentat 3ºC.

2. Un mòbil segueix una trajectòria rectilínia. La funció que ens dóna la posició del mòbil (mesurada en metres) en funció del temps (mesurat en segons) és:

$$\boldsymbol{f(t) = t^2 - 2t + 1} \quad \begin{cases} y = f(t) = \text{Posició del mòbil respecte de l'origen} \\ t = \text{Temps en segons} \end{cases}$$

Calcula la velocitat mitjana, v_m, del mòbil entre $t = 1s$ i $t = 3s$.

La velocitat mitjana entre 1 i 3 segons coincideix amb la $\boldsymbol{TVM}_{[1,3]}$:

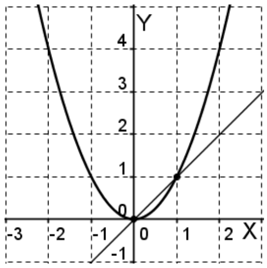
$$\boldsymbol{v_m = TVM}_{[1,3]} = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{4-0}{2} = \frac{4}{2} = \boxed{2\text{ m/s}}$$

El mòbil passa de la posició 0 m a la posició 4 m en 2 s, és a dir, recorre 4 m en 2 s. Per tant, la velocitat mitjana del mòbil en aquest interval de temps és de 2 m/s. Recorre, de mitjana, 2 metres cada segon. Això no vol dir que la velocitat del mòbil en aquest període de temps sigui sempre de 2 m/s; aquest és només un valor mitjà.

3. **Donada la funció $f(x) = x^2$, calcula:**

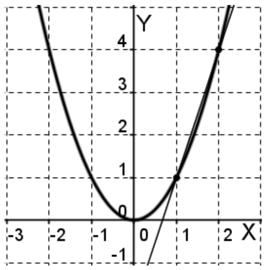
a) La $TVM_{[0,1]}$ b) La $TVM_{[1,2]}$ c) La $TVM_{[-2,0]}$ d) La $TVM_{[-1,1]}$

a) $TVM_{[0,1]} = \dfrac{f(1)-f(0)}{1-0} = \dfrac{1-0}{1} = \boxed{1}$



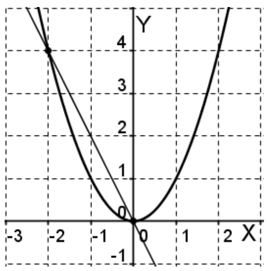
En l'interval $[0,1]$, el valor de la funció augmenta, de mitjana, una unitat per cada unitat que augmenta x.

b) $TVM_{[1,2]} = \dfrac{f(2)-f(1)}{2-1} = \dfrac{4-1}{1} = \boxed{3}$



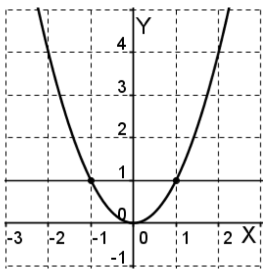
En l'interval $[1,2]$, el valor de la funció augmenta, de mitjana, tres unitats per cada unitat que augmenta x.

c) $TVM_{[-2,0]} = \dfrac{f(0)-f(-2)}{2-0} = \dfrac{0-4}{2} = \boxed{-2}$



En l'interval $[-2,0]$, el valor de la funció disminueix, de mitjana, dues unitats per cada unitat que augmenta x.

d) $TVM_{[-1,1]} = \dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = \dfrac{1-1}{2} = \boxed{0}$



La variació mitjana de la funció entre -1 i 1 és 0, però això no vol dir que el creixement sigui nul en tot aquest interval. De fet, la funció decreix entre -1 i 0 i creix entre 0 i 1.

Exercici: Donada la funció $f(x) = x^2 - 2x - 1$, calcula la taxa de variació mitjana de f en els intervals $[1,3]$ i $[-1,0]$.

Sol.: $TVM_{[1,3]} = 2$ i $TVM_{[-1,0]} = -3$

Derivada d'una funció en un punt

Hem vist que la taxa de variació mitjana és un valor mitjà que ens informa de com varia globalment una funció en un interval, però no ens dóna informació de com varia la funció en un punt determinat.

A vegades ens interessa conèixer la variació de la funció en un punt. Per això, introduïm el concepte de taxa de variació instantània o derivada d'una funció en un punt.

Si una funció representa la posició d'un mòbil en funció del temps, la taxa de variació mitjana d'aquesta funció en un interval és la velocitat mitjana del mòbil en aquest interval i la taxa de variació instantània o derivada en un punt és la velocitat instantània del mòbil en un moment determinat. A vegades és més útil conèixer la velocitat instantània que la velocitat mitjana.

Exemples:

1. Per estudiar les causes d'un accident d'un vehicle (un cotxe, un avió, un tren, etc.), és important saber la velocitat instantània en el moment de l'accident, no la velocitat mitjana del trajecte. Per això, les caixes negres dels avions enregistren velocitats instantànies.
2. En el llançament d'un coet espacial és molt important calcular la velocitat instantània en diferents moments clau, com en el moment del l'inici del llançament. En aquest cas, la velocitat mitjana dóna poca informació.
3. En moltes ocasions, és important conèixer en quin punt o punts canvia el creixement d'una funció (passa de ser creixent a ser decreixent o viceversa). Per això hem de conèixer com varia la funció en cada punt.

Per calcular la derivada d'una funció f en un punt d'abscissa $x=a$, podem calcular la $\boldsymbol{TVM}$ en intervals del tipus $[a,x]$ o $[x,a]$, amb la x cada vegada més propera a a. Com més s'aproxima x a a, més petit és l'interval i més s'aproxima la $\boldsymbol{TVM}$ a la derivada. Així, la derivada de f en $x=a$ és el límit d'aquestes $\boldsymbol{TVM}$ quan $x \to a$ (fem l'interval infinitament petit, perquè s'aproximi a un punt).

Exemple: **Vegem a què s'aproxima la taxa de variació mitjana de la funció $\boldsymbol{f(x)=x^2+1}$ en l'interval $\boldsymbol{[2,x]}$ quan $\boldsymbol{x \to 2}$:**

$$\boldsymbol{TVM}_{[2,2'5]}=\frac{f(2,5)-f(2)}{2,5-2}=\frac{7,25-5}{0,5}=\frac{2,25}{0,5}=\boxed{4,5}$$

$$\boldsymbol{TVM}_{[2,2'1]}=\frac{f(2,1)-f(2)}{2,1-2}=\frac{5,41-5}{0,1}=\frac{0,41}{0,1}=\boxed{4,1}$$

$$\boldsymbol{TVM}_{[2,2'01]}=\frac{f(2,01)-f(2)}{2,01-2}=\frac{5,0401-5}{0,01}=\frac{0,0401}{0,01}=\boxed{4,01}$$

La taxa de variació mitjana s'aproxima a 4.

La **derivada d'una funció $\boldsymbol{f}$ en el punt d'abscissa $\boldsymbol{x=a}$** es representa amb $\boldsymbol{f'(a)}$ i es defineix com el límit següent:

$$\boldsymbol{f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

Si fem $x-a=h$:

$$\boxed{\boldsymbol{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}}$$

→ **Derivada de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x=a}$**

Si aquest límit existeix, es diu que la funció és derivable en $x=a$ i si no existeix, es diu que no es derivable en $x=a$.

Exemple: **Calcula la derivada de la funció $\boldsymbol{f(x)=x^2+1}$ en $\boldsymbol{x=2}$:**

$$f(2+h)=(2+h)^2+1=4+4h+h^2+1=h^2+4h+5$$

$$f(2)=2^2+1=5$$

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+4h+5-5}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+4h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h+4}{1}=\boxed{4}$$

En valors de x propers a 2, el valor de la funció augmenta 4 vegades el que augmenta x.

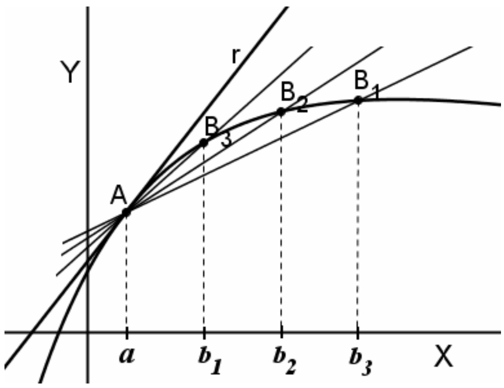
Exercici: Calcula la derivada de la funció $f(x)=3x+4$ en $x=5$:

Sol.: 3

Interpretació geomètrica de la derivada d'una funció en un punt

Recordem que la $\boldsymbol{TVM}_{[a,b]}$ coincideix amb el pendent de la recta que passa per A$(a,\ f(a))$ i B$(b, f(b))$:

$$\boldsymbol{TVM}_{[a,b]} = m_{AB}$$



Tal com veiem en la figura de la dreta, a mesura que B s'apropa a A, la recta que passa per A i B s'apropa a la recta r tangent a la corba en el punt A.

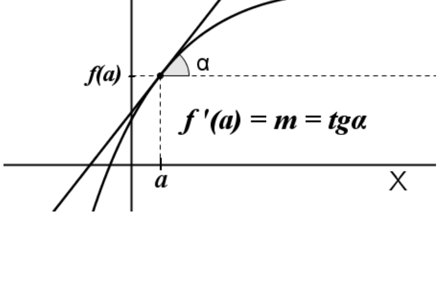
Per tant, m_{AB} tendeix al pendent de r (que representarem amb m) quan B s'apropa a A.

Com que la $\boldsymbol{TVM}_{[a,b]}$ tendeix a la derivada de la funció en $x=a$, quan $b \to a$, deduïm que la derivada de la funció en $x=a$ és igual a m.

La **derivada d'una funció *f* en el punt d'abscissa $\boldsymbol{x=a}$** coincideix amb el pendent de la recta tangent a la gràfica de f en el punt $(a, f(a))$:

$$\boxed{\boldsymbol{f'(a)=m}}$$

amb m = pendent de la recta tangent a f en el punt $(a, f(a))$.



Nota:
Una funció és derivable en $x=a$ si la seva gràfica admet recta tangent en aquest punt.

Funció derivada

La **funció derivada d'una funció *f* (o derivada d'una funció *f*)** és una altra funció que a cada valor de x li fa correspondre el valor de la derivada de f en aquest punt. Es representa amb $f'(x)$.

$$\boldsymbol{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

Coneixent la funció derivada de *f*, podrem calcular fàcilment la derivada de *f* en un punt qualsevol d'abscissa $x=a$. Només caldrà substituir x per a en l'expressió algebraica de la funció derivada.

Exemple: **Troba la funció derivada de la funció $f(x)=x^2+1$ i calcula $f'(2)$ i $f'(-5)$.**

$$f(x+h)=(x+h)^2+1=x^2+2xh+h^2+1 \qquad f(x)=x^2+1$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2+1-\left(x^2+1\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2+\cancel{1}-\cancel{x^2}-\cancel{1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2x\cancel{h}+h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}\frac{2x+h}{1}=\boxed{2x}$$

$$f'(x)=2x\rightarrow\begin{cases} f'(2)=2\cdot 2=\boxed{4}\\ f'(-5)=2\cdot(-5)=\boxed{-10}\end{cases}$$

Exercici: Troba la funció derivada de la funció $f(x)=3x+4$ i calcula $f'(2)$ i $f'(-5)$.

Sol.: $f'(x)=3,\ f'(2)=3,\ f'(-5)=3$

Càlcul de derivades

Calcular les funcions derivades aplicant la definició de derivada, com hem fet en l'exemple i l'exercici anteriors, pot ser llarg i complicat. Tanmateix, a partir de la definició de derivada s'obtenen unes regles de derivació pràctiques que permeten calcular la funció derivada fàcilment.

A continuació veurem algunes d'aquestes regles de derivació.

Derivada de la funció constant

$$\boxed{f(x) = k \rightarrow f'(x) = 0}$$

La funció constant ni creix ni decreix, per tant, té derivada igual a zero.

Exemples: **Calcula la derivada de les funcions següents:**

1. $f(x) = 5 \rightarrow f'(x) = \boxed{0}$

2. $f(x) = \frac{3}{5} \rightarrow f'(x) = \boxed{0}$

3. $f(x) = \sqrt{3} \rightarrow f'(x) = \boxed{0}$

4. $f(x) = \pi \rightarrow f'(x) = \boxed{0}$

Exercici: Calcula la derivada de les funcions següents:

a) $f(x) = -8$

b) $f(x) = -3\sqrt{2}$

Derivada de la funció $f(x) = x$

$$\boxed{f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1}$$

Derivada de la funció $f(x) = x^p$

$$\boxed{f(x) = x^p \rightarrow f'(x) = p \cdot x^{p-1}}$$ amb $p \in Q$

Exemples: **Calcula la derivada de les funcions següents:**

1. $f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = \boxed{2x}$

2. $f(x) = x^3 \rightarrow f'(x) = \boxed{3x^2}$

3. $f(x) = x^5 \rightarrow f'(x) = \boxed{5x^4}$

4. $f(x) = x^{10} \rightarrow f'(x) = \boxed{10x^9}$

També podem aplicar la mateixa regla si l'exponent és negatiu o fraccionari:

5. $\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{x}} \to f(x)=x^{-1} \to f'(x)=-x^{-2}=\boxed{-\frac{1}{x^2}}$

6. $\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{x^2}} \to f(x)=x^{-2} \to f'(x)=-2x^{-3}=\boxed{-\frac{2}{x^3}}$

7. $\boldsymbol{f(x)=\sqrt{x}} \to f(x)=x^{\frac{1}{2}} \to f'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}=\boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$

8. $\boldsymbol{f(x)=\sqrt[3]{x^5}} \to f(x)=x^{\frac{5}{3}} \to f'(x)=\frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1}=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}=\boxed{\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}}$

9. $\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}} \to f(x)=x^{-\frac{1}{2}} \to f'(x)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}=\boxed{-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}}$

Exercicis: Calcula la derivada de les funcions següents:

a) $f(x)=x^7$

b) $f(x)=x^9$

c) $f(x)=\frac{1}{x^3}$

d) $f(x)=\sqrt[3]{x}$

e) $f(x)=\sqrt{x^3}$

f) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

Derivada de la funció exponencial

$$\boxed{\boldsymbol{f(x)=a^x \to f'(x)=a^x\cdot \ln a}}$$ amb $a\in R^+$ i $a\neq 1$

Vegem la derivada del cas particular de funció exponencial en què $a=e$:

$$f(x)=e^x \to f'(x)=e^x\cdot \ln e=e^x\cdot 1=\boxed{e^x}$$

$$\boxed{\boldsymbol{f(x)=e^x \to f'(x)=e^x}}$$

Exemples: **Calcula la derivada de les funcions següents:**

1. $\boldsymbol{f(x)=5^x} \to f'(x)=\boxed{5^x\cdot\ln 5}$ **2.** $\boldsymbol{f(x)=2^x} \to f'(x)=\boxed{2^x\cdot\ln 2}$

Exercicis: Calcula la derivada de les funcions següents:

a) $f(x)=8^x$

b) $f(x)=10^x$

Derivada del producte d'una constant per una funció

$$\boldsymbol{f(x)=k\cdot g(x)\to f'(x)=k\cdot g'(x)}$$

Exemples: **Calcula la derivada de les funcions següents:**

1. $\boldsymbol{f(x)=5x} \to f'(x)=5\cdot 1=\boxed{5}$ **2.** $\boldsymbol{f(x)=6x^2} \to f'(x)=6\cdot 2x=\boxed{12x}$

3. $\boldsymbol{f(x)=-5x^4} \to f'(x)=-5\cdot 4x^3=\boxed{-20x^3}$ **4.** $\boldsymbol{f(x)=\frac{x^3}{5}} \to f'(x)=\boxed{\frac{3x^2}{5}}$

5. $\boldsymbol{f(x)=\frac{3}{x}} \to f(x)=3x^{-1} \to f'(x)=-3x^{-2}=\boxed{-\frac{3}{x^2}}$

6. $\boldsymbol{f(x)=5\sqrt{x}} \to f(x)=5x^{\frac{1}{2}} \to f'(x)=\frac{5}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{5}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{5}{2x^{\frac{1}{2}}}=\boxed{\frac{5}{2\sqrt{x}}}$

Exercicis: Calcula la derivada de les funcions següents:

a) $f(x)=9x^8$

b) $f(x)=-3x^5$

c) $f(x)=\frac{3}{4}x^3$

e) $f(x)=\frac{7}{4x^2}$

d) $f(x)=-10\sqrt[5]{x}$

Derivada de la suma de funcions

La derivada de la suma de diverses funcions és la suma de les derivades d'aquestes funcions:

$$\boxed{f(x)=g(x)+h(x)+...+t(x)\rightarrow f'(x)=g'(x)+h'(x)+...+t'(x)}$$

Exemples: **Calcula la derivada de les funcions següents:**

1. $f(x)=5x^3+2x^2-8x+10 \rightarrow f'(x)=\boxed{15x^2+4x-8}$

2. $f(x)=-x^4+\sqrt{2}x^3-\frac{6}{x^3}+1 \rightarrow f'(x)=\boxed{-4x^3+3\sqrt{2}x^2+\frac{18}{x^4}}$

Exercicis: Calcula la derivada de les funcions següents:

a) $f(x)=x^3-2x^2-3x+5$

b) $f(x)=5x^3+2x+5$

c) $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{x}$

d) $f(x)=4^x+2x^3+\pi x$

Derivada del producte de dues funcions

$$\boxed{f(x)=g(x)\cdot h(x)\rightarrow f'(x)=g'(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot h'(x)}$$

Exemples: **Calcula la derivada de les funcions següents:**

1. $f(x)=x\cdot 5^x \rightarrow f'(x)=1\cdot 5^x+x\cdot 5^x\ln 5=\boxed{5^x+x\cdot 5^x\ln 5}$

2. $\boldsymbol{f(x)=(2x+1)\cdot\left(3x^2-5\right)}$

$$\rightarrow f'(x)=2\cdot\left(3x^2-5\right)+(2x+1)\cdot 6x=6x^2-10+12x^2+6x=\boxed{18x^2+6x-10}$$

Nota: En l'exemple 2, es pot fer primer el producte i després derivar el polinomi resultant. Aquest procediment sol ser més senzill que derivar directament el producte de dos polinomis.

Exercicis: Calcula la derivada de les funcions següents:

a) $f(x)=7x^3\cdot e^x$

b) $f(x)=(x+1)\cdot\left(3x^4+x-3\right)$

Derivada del quocient de dues funcions

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}\rightarrow f'(x)=\frac{g'(x)\cdot h(x)-g(x)\cdot h'(x)}{\left[h(x)\right]^2}}$$

Exemples: **Calcula la derivada de les funcions següents:**

1. $\boldsymbol{f(x)=\frac{x}{5^x}}$ $\rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot \cancel{5^x}-x\cdot\cancel{5^x}\ln 5}{\left(5^x\right)^{\cancel{2}}}=\boxed{\frac{1-x\cdot\ln 5}{5^x}}$

2. $\boldsymbol{f(x)=\frac{2x+1}{3x^2-5}}$

$$\rightarrow f'(x)=\frac{2\cdot\left(3x^2-5\right)-(2x+1)\cdot 6x}{\left(3x^2-5\right)^2}=\frac{6x^2-10-12x^2-6x}{\left(3x^2-5\right)^2}=\boxed{\frac{-6x^2-6x-10}{\left(3x^2-5\right)^2}}$$

Exercicis: Calcula la derivada de les funcions següents:

a) $f(x)=\dfrac{7x^3}{e^x}$

b) $f(x)=\dfrac{x+1}{3x^4+x-3}$

Derivada de la funció $f(x) = [g(x)]^p$

$$\boldsymbol{f(x)=\left[g(x)\right]^p \rightarrow f'(x)=p\cdot\left[g(x)\right]^{p-1}\cdot g'(x)} \quad \text{amb } p\in Q$$

Exemples: **Calcula la derivada de les funcions següents:**

1. $\boldsymbol{f(x)=(2x+1)^2} \rightarrow f'(x)=2(2x+1)\cdot 2=\boxed{4(2x+1)}$

2. $\boldsymbol{f(x)=(3x^3+4x^2+1)^5} \rightarrow f'(x)=5(3x^3+4x^2+1)^4\cdot(9x^2+8x)$

També podem aplicar la mateixa regla si l'exponent és negatiu o fraccionari:

3. $\boldsymbol{f(x)=\dfrac{1}{5x^2+4}} \rightarrow f(x)=(5x^2+4)^{-1}$

$\rightarrow f'(x)=-(5x^2+4)^{-2}\cdot 10x=\boxed{\dfrac{-10x}{(5x^2+4)^2}}$

4. $\boldsymbol{f(x)=\sqrt{4x^3+2x^2-x-3}} \rightarrow f(x)=(4x^3+2x^2-x-3)^{\frac{1}{2}}$

$\rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2}(4x^3+2x^2-x-3)^{-\frac{1}{2}}\cdot(12x^2+4x-1)=\boxed{\dfrac{12x^2+4x-1}{2\sqrt{4x^3+4x^2-x-3}}}$

Exercicis: Calcula la derivada de les funcions següents:

a) $f(x) = \left(x^5 + 2x^2 + x - 10\right)^8$

b) $f(x) = \sqrt[3]{\left(3x^2 - x + 1\right)^4}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\left(x+5\right)^2}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{6x^3 - 2x}$

Derivada de la funció $f(x) = a^{g(x)}$

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = a^{g(x)} \rightarrow f'(x) = a^{g(x)} \cdot g'(x) \cdot \ln a} \quad \text{amb } a \in R^+ \text{ i } a \neq 1}$$

Exemples: **Calcula la derivada de les funcions següents:**

1. $\boldsymbol{f(x) = 2^{5x}} \rightarrow f'(x) = \boxed{2^{5x} \cdot 5 \cdot \ln 2}$

2.

$\boldsymbol{f(x) = e^{\left(3x^3 + 4x^2 + 1\right)}} \rightarrow f'(x) = e^{\left(3x^3+4x^2+1\right)} \cdot \left(9x^2 + 8x\right) = \boxed{\left(9x^2 + 8x\right) \cdot e^{\left(3x^3+4x^2+1\right)}}$

Exercicis: Calcula la derivada de les funcions següents:

a) $f(x) = 8^{\left(x^5 + 2x^2 + x - 10\right)}$

b) $f(x)=e^{2x^5}$

Taules de derivades

En les taules següents, resumim les regles de derivació que hem vist:

f(x)	**f'(x)**
k	0
x	1
x^p	px^{p-1}
a^x	$a^x \cdot \ln a$
e^x	e^x

f(x)	**f'(x)**
$k\cdot g(x)$	$k\cdot g'(x)$
$g(x)+h(x)$	$g'(x)+h'(x)$
$g(x)\cdot h(x)$	$g'(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot h'(x)$
$\dfrac{g(x)}{h(x)}$	$\dfrac{g'(x)\cdot h(x)-g(x)\cdot h'(x)}{\left[h(x)\right]^2}$
$\left[g(x)\right]^p$	$p\cdot\left[g(x)\right]^{p-1}\cdot g'(x)$
$a^{g(x)}$	$a^{g(x)}\cdot g'(x)\cdot \ln a$