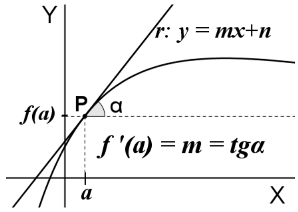
2. APLICACIONS DE LES DERIVADES

Càlcul de l'equació de la recta tangent a una corba en un punt

Recordem la interpretació geomètrica de la derivada d'una funció en un punt:

La **derivada d'una funció f en el punt P d'abscissa $x = a$** coincideix amb el pendent de la recta tangent a la gràfica de f en el punt P$(a, f(a))$:



$\boxed{f'(a) = m}$ amb $m =$ pendent de la recta tangent a f en el punt P$(a, f(a))$.

Recordem també que *l'equació punt-pendent* d'una recta de pendent m i que passa pel punt $P(p_1, p_2)$ és: $y - p_2 = m \cdot (x - p_1)$.

Per **calcular l'equació de la recta tangent a la gràfica d'una funció donada $f(x)$ en un punt P d'abscissa $x = a$**, procedim de la manera següent:

- Calculem el pendent de la recta, m, que és igual a $f'(a)$: $\boldsymbol{m = f'(a)}$
  - Calculem $f'(x)$.
  - Calculem $f'(a)$, substituint x per a en $f'(x)$.
- Calculem les coordenades del punt P, del qual coneixem l'abscissa $x = a$. Aquest punt, anomenat també punt de tangència, és un punt comú de la recta i de la gràfica de $f(x)$. Aleshores, l'ordenada del punt és igual a $f(a)$: $\boldsymbol{P(a, f(a))}$.
- Escrivim l'equació punt-pendent de la recta de pendent $m = f'(a)$ i que passa per $P(a, f(a))$:

$$\boldsymbol{y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)}$$

- Aïllem y per calcular l'equació explícita de la recta, que és del tipus: $y = mx + n$

Exemple: **Calcula l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 2x - 1}$ en el punt d'abscissa $\boldsymbol{x = 2}$.**

- Calculem el pendent de la recta, m, que és igual a $f'(2)$:

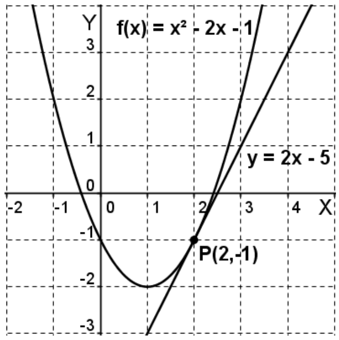
$$f'(x) = 2x - 2 \rightarrow f'(2) = 2 \cdot 2 - 2 = 2 \rightarrow \boxed{m = f'(2) = 2}$$

- Calculem les coordenades del punt P

$$P(2, f(2));\; f(2)=2^2-2\cdot 2-1=\boxed{-1}\rightarrow \boxed{P(2,-1)}$$

- Escrivim l'equació punt-pendent de la recta i aïllem y

$$y\underbrace{-(-1)}_{+1}=2\cdot(x-2)\rightarrow y=2x-4-1\rightarrow \boxed{y=2x-5}$$



Exercici: Calcula l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)=x^3+4x^2+10x+10$ en el punt d'abscissa $x=-1$.

Sol.: $y=5x+8$

Estudi del creixement i decreixement d'una funció

Creixement, decreixement i extrems relatius

Una funció f és **creixent en un interval** si en aquest interval quan augmenta el valor de x també augmenta el de $f(x)$, és a dir, si per a tot parell de valors x_1 i x_2 de l'interval es compleix que:

$$\text{Si } x_1<x_2 \rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Una funció és **creixent en un punt d'abscissa $x=a$** si és creixent al voltant d'aquest punt, és a dir, si existeix un interval del tipus $(a-h, a+h)$, amb $h\in R$, en el qual la funció és creixent.

Una funció ***f*** **és decreixent en un interval** si en aquest interval quan augmenta el valor de x disminueix el valor de $f(x)$, és a dir, si per a tot parell de valors x_1 i x_2 de l'interval es compleix que:

$$\text{Si } x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > (x_2)$$

Una funció és **decreixent en un punt d'abscissa** $x = a$ si és decreixent al voltant d'aquest punt, és a dir, si existeix un interval del tipus $(a-h, a+h)$, amb $h \in R$, en el qual la funció és decreixent.

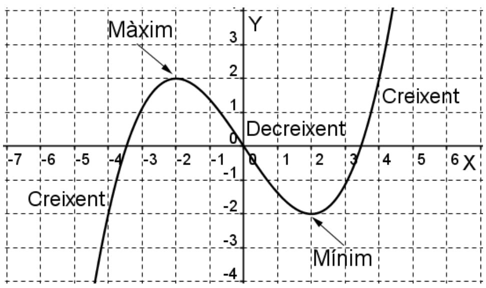
Una funció contínua i derivable en $x = a$ **té un màxim relatiu en** $x = a$ si en aquest punt la funció passa de ser creixent a ser decreixent.

Una funció contínua i derivable en $x = a$ **té un mínim relatiu en** $x = a$ si en aquest punt la funció passa de ser decreixent a ser creixent.

Els màxims i mínims relatius s'anomenen també **extrems relatius.**

Una funció té un **màxim (mínim) absolut** en $x = a$ si *f(a)* és la més gran (petita) de totes les imatges de la funció.

Exemple: **A partir de la gràfica, estudia els intervals de creixement i decreixement i els extrems relatius de la funció següent:**



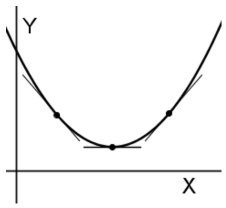
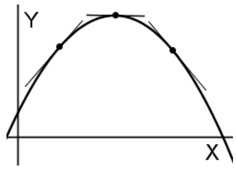
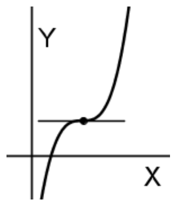
- En l'interval $(-\infty, -2)$ la funció és creixent.
- La funció té un màxim relatiu en $x = -2$.
- En l'interval $(-2, 2)$ la funció és decreixent.
- La funció té un mínim relatiu en $x = 2$.
- En l'interval $(2, +\infty)$ la funció és creixent.

Concavitat, convexitat i punts d'inflexió

Una funció és **còncava** en un interval si la recta tangent a la seva gràfica en un punt qualsevol d'aquest interval se situa per sota de la gràfica, al voltant del punt de tangència.

Una funció és **convexa** en un interval si la recta tangent a la seva gràfica en un punt qualsevol d'aquest interval se situa per sobre de la gràfica, al voltant del punt de tangència.

Una funció **té un punt d'inflexió en el punt d'abscissa** $\boldsymbol{x = a}$, si en aquest punt la funció passa de ser còncava a ser convexa o viceversa.

Exemples:		
Còncava	**Convexa**	**Punt d'inflexió**
		

Relació de la derivada amb el creixement, el decreixement i els punts estacionaris

Recordem que la derivada d'una funció en un punt és el pendent de la recta tangent a la gràfica de la funció en aquest punt i que el pendent d'una recta ens dóna informació sobre el creixement d'aquesta recta. El signe del pendent ens indica si la recta és creixent o decreixent:

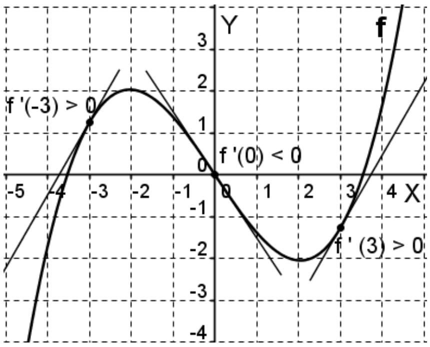
- Si el pendent és positiu, la recta és creixent: $m > 0 \rightarrow$ recta creixent.
- Si el pendent és negatiu, la recta és decreixent: $m < 0 \rightarrow$ recta decreixent.

Si la recta tangent a una funció en un punt és creixent, la funció és creixent en aquest punt. Anàlogament, si la recta tangent és decreixent, la funció serà decreixent.

Així doncs, <u>la derivada d'una funció en un punt ens dóna informació sobre el creixement de la funció en aquest punt. El signe de la derivada ens indica si la funció és creixent o decreixent</u>:

- **Si** $\boldsymbol{f\,'(a) > 0 \rightarrow f}$ **és creixent en** $\boldsymbol{x = a}$.
- **Si** $\boldsymbol{f\,'(a) < 0 \rightarrow f}$ **és decreixent en** $\boldsymbol{x = a}$.

Exemple:



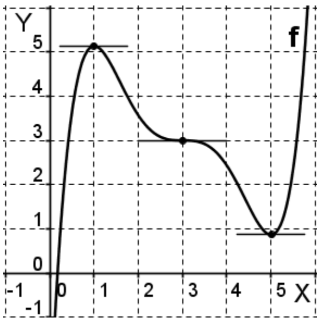
- $f\,'(-3) > 0 \rightarrow f$ és creixent en $x = -3$.
- $f\,'(0) < 0 \rightarrow f$ és decreixent en $x = 0$.
- $f\,'(-3) > 0 \rightarrow f$ és creixent en $x = 3$.

Si la derivada de la funció en un punt d'abscissa $x = a$ és igual a zero (recta tangent horitzontal), aleshores la funció pot tenir un extrem relatiu o un punt d'inflexió en $x = a$ (la funció ni creix ni decreix en aquest punt):

Si $f\,'(a) = 0 \rightarrow f$ té un extrem relatiu o un punt d'inflexió en $x = a$.

Els punts en els quals la derivada és igual a zero s'anomenen **punts estacionaris**. Així, els punts estacionaris poden ser extrems relatius o punts d'inflexió.

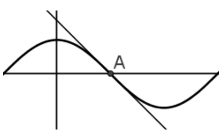
Exemple:



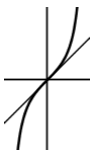
- $f\,'(1) = 0 \rightarrow f$ té un màxim relatiu en $x = 1$.
- $f\,'(3) = 0 \rightarrow f$ té un punt d'inflexió en $x = 3$.
- $f\,'(5) = 0 \rightarrow f$ té un mínim relatiu en $x = 5$.

Nota: No tots els punts d'inflexió tenen tangent horitzontal. Vegem exemples de punts d'inflexió de tangent no horitzontal:

a)



b)



Estudi del creixement, el decreixement i els punts estacionaris d'una funció

Per **estudiar el creixement, el decreixement i els punts estacionaris d'una funció donada $f(x)$,** procedim de la manera següent:

- Calculem $f'(x)$.
- Resolem l'equació $f'(x) = 0$, per calcular les abscisses dels punts estacionaris.
- Calculem els punts de discontinuïtat de $f(x)$, en els quals també pot canviar el creixement de la funció.
- Estudiem el signe de $f'(x)$ a l'esquerra i a la dreta de cada punt estacionari i dels punts de discontinuïtat, per determinar els intervals de creixement i decreixement i esbrinar si els punts estacionaris són màxims, mínims o punts d'inflexió. Per fer-ho, serà convenient factoritzar $f(x)$ i elaborar un quadre, tal com veurem en els exemples.
- Calculem l'ordenada dels punts estacionaris.

Exemples:

1. Estudia el creixement, el decreixement i els punts estacionaris de la funció $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

- Calculem $f'(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

- Resolem l'equació $f'(x) = 0$, per calcular les abscisses dels punts estacionaris:

$$3x^2 - 12x + 9 = 0 \rightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \rightarrow \boxed{x = 1} \ i \ \boxed{x = 3}$$

Possibles màxims, mínims o punts d'inflexió.

- Calculem els punts de discontinuïtat de $f(x)$:

  $f(x)$ és un polinomi, per tant, és una funció contínua en R.

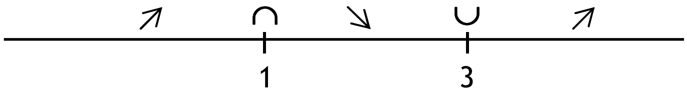
- Estudiem el signe de $f'(x)$:
  - Factoritzem $f'(x)$: $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$

- o Elaborem un quadre per calcular el signe de $f'(x)$ en els intervals en què queda dividit el domini pels punts estacionaris i els punts de discontinuïtat. El signe de f' en cadascun d'aquests intervals coincideix amb el signe de f'en qualsevol punt de l'interval:

Intervals	3	$x-1$	$x-3$	f'	f
$(-\infty,1)$	+	–	–	+	Creixent
$(1,3)$	+	+	–	–	Decreixent
$(3,+\infty)$	+	+	+	+	Creixent

→ Hi ha un màxim en $x=1$

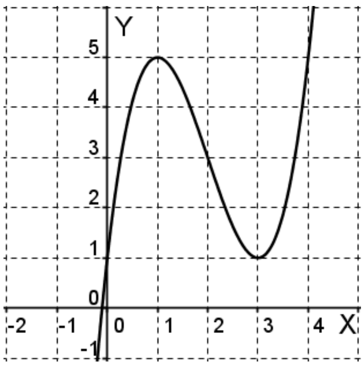
→ Hi ha un mínim en $x=3$



- Calculem l'ordenada dels punts estacionaris:

$$f(x)=x^3-6x^2+9x+1$$

$$\rightarrow\begin{cases} f(1)=1^3-6\cdot 1^2+9\cdot 1+1=\boxed{5}\longrightarrow \text{Màxim}: \boxed{(1,5)} \\ f(3)=3^3-6\cdot 3^2+9\cdot 3+1=\boxed{1}\longrightarrow \text{Mínim}: \boxed{(3,1)} \end{cases}$$



2. **Estudia el creixement, el decreixement i els punts estacionaris de la funció $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2$.**

- Calculem $f'(x)$:

$$f'(x)=12x^3-24x^2+12x$$

- Resolem l'equació $f'(x)=0$, per calcular les abscisses dels punts estacionaris:

$$f'(x)=12x^3-24x^2+12x=0$$

$$\rightarrow 12x(x^2-2x+1)=0\rightarrow\begin{cases} 12x=0\rightarrow \boxed{x=0} \\ x^2-2x+1=0\rightarrow \boxed{x=1} \end{cases}\rightarrow$$ Possibles màxims, mínims o punts d'inflexió.

- Calculem els punts de discontinuïtat de $f(x)$:

  $f(x)$ és un polinomi, per tant, és una funció contínua en R.

- Estudiem el signe de $f'(x)$:

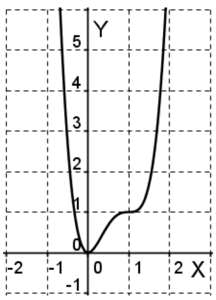
  - Factoritzem $f'(x)$: $f'(x) = 12x(x-1)^2$
  - Elaborem un quadre per calcular el signe de $f'(x)$ en els intervals en què queda dividit el domini pels punts estacionaris i els punts de discontinuïtat:

Intervals	$12x$	$(x-1)^2$	f'	f	
$(-\infty, 0)$	–	+	–	Decreixent	
$(0,1)$	+	+	+	Creixent	→ Hi ha un mínim en $x = 0$
$(1,+\infty)$	+	+	+	Creixent	→ Hi ha un punt d'inflexió en $x = 1$

$$\searrow \quad \cap \quad \nearrow \quad \sim \quad \nearrow$$
$$0 \qquad\qquad 1$$

- Calculem l'ordenada dels punts estacionaris:

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 \rightarrow \begin{cases} f(0) = 3\cdot 0^4 - 8\cdot 0^3 + 6\cdot 0^2 = \boxed{0} \longrightarrow \text{Mínim}: \boxed{(0,0)} \\ f(1) = 3\cdot 1^4 - 8\cdot 1^3 + 6\cdot 1^2 = \boxed{1} \longrightarrow \text{P. d'inflexió}: \boxed{(1,1)} \end{cases}$$



3. **Estudia el creixement, el decreixement i els punts estacionaris de la funció $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.**

- Calculem $f'(x)$ i resolem l'equació $f'(x) = 0$

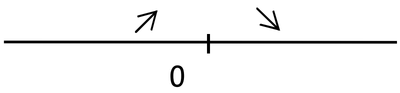
$f(x) = \dfrac{1}{x^2} = x^{-2} \rightarrow f'(x) = -2x^{-3} = -\dfrac{2}{x^3}$; $-\dfrac{2}{x^3} = 0$ no té solució, $f'(x)$ no s'anul·la mai.

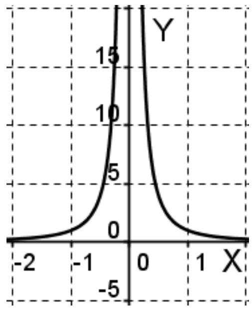
- <u>Calculem els punts de discontinuïtat de $f(x)$</u>:

  El denominador de l'expressió algebraica de la funció s'anul·la quan $x = 0$. Per tant, la funció és discontínua en $x = 0$: $\text{Dom } f = R - \{0\}$.

- <u>Estudiem el signe de $f'(x)$</u>:

Intervals	**-2**	x^3	f'	f
$(-\infty, 0)$	–	–	+	Creixent
$(0, +\infty)$	–	+	–	Decreixent

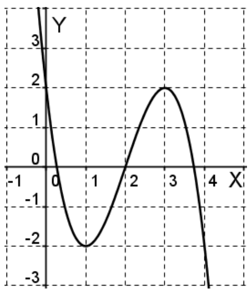




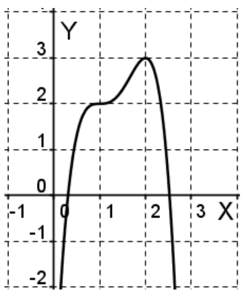
<u>Exercicis:</u>

<u>1.</u> Determina els intervals de creixement i decreixement i els extrems relatius de les funcions següents:

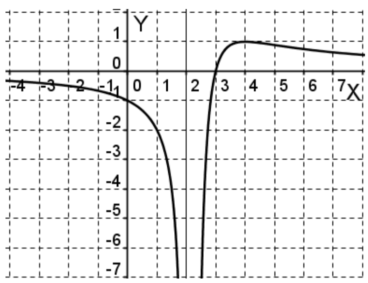
a)



b)



c)



2. Estudia el creixement, el decreixement i els punts estacionaris de les funcions següents:

a) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2$

b) $f(x)=\frac{1}{x}$

Sol.:

1. **a)** Creixent: $(1,3)$; decreixent: $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$. Mínim: $(1,-2)$; màxim: $(3,2)$.

b) Creixent: $(-\infty,2)$; decreixent: $(2,+\infty)$. Punt d'inflexió: $(1,2)$; màxim: $(2,3)$.

c) Creixent: $(2,4)$; decreixent: $(-\infty,2)\cup(4,+\infty)$. Màxim: $(4,1)$.

2. **a)** Creixent: $(-2,0)\cup(2,+\infty)$; decreixent: $(-\infty,-2)\cup(0,2)$.

Mínims: $(-2,-4)$ i $(2,-4)$; màxim: $(0,0)$.

b) Decreixent en R. No té punts estacionaris.

Representació gràfica de funcions

A continuació estudiarem com fer la representació gràfica de funcions senzilles.

Per **representar gràficament una funció**, seguim els passos següents:

- Determinem el domini de la funció.
- Calculem les asímptotes:
  - Asímptotes horitzontals:

    Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=k$ i/o $\lim_{x\to-\infty} f(x)=k \to \boxed{\boldsymbol{y=k}}$ és una asímptota horitzontal de *f*.
  - Asímptotes verticals:

    Si $\lim_{x\to a^-} f(x)=\infty$ i/o $\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty \to \boxed{\boldsymbol{x=a}}$ és una asímptota vertical de *f*.
- Calculem els punts de tall amb els eixos:
  - Tall o talls amb l'eix OX:
    - Són del tipus $(b,0)\to\boxed{y=0}$ (l'ordenada dels punts de l'eix OX és 0)
    - Resolem l'equació $f(x)=0$ per calcular x.
  - Tall amb l'eix OY:
    - És del tipus $(0,a)\to\boxed{x=0}$ (l'abscissa dels punts de l'eix OY és 0)
    - Substituïm x per 0 i calculem y .
- Estudiem el creixement, el decreixement i els punts estacionaris.
- Fem un esbós de la gràfica de la funció a partir de les dades que hem obtingut.

Exemples:

1. Representa gràficament la funció $\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x}$.

- Determinem el domini de la funció:

  $f(x)$ és un polinomi, per tant $\mathrm{Dom}\, f=R$.
- Calculem les asímptotes:

  No té asímptotes (els polinomis no tenen asímptotes).

- Calculem els <u>punts de tall</u> amb els eixos:
  - Tall eix OX:

$$y=0 \rightarrow \frac{1}{4}x^3 - 3x = 0 \rightarrow x\cdot\left(\frac{1}{4}x^2 - 3\right)=0 \rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ \frac{1}{4}x^2 - 3 = 0 \rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{12}} \approx \pm 3,46 \end{cases}$$

$\rightarrow \boxed{(0,0),\ \left(-\sqrt{12},0\right)\ i\ \left(+\sqrt{12},0\right)}$ són els punts de tall amb l'eix OX.

  - Tall eix OY:

$x=0 \rightarrow y = f(0) = \frac{1}{4}\cdot 0^3 - 3\cdot 0 = 0 \rightarrow \boxed{(0,0)}$ és el punt de tall amb l'eix OY.

- Estudiem el <u>creixement, el decreixement i els punts estacionaris</u>:
  - <u>Calculem *f '*(*x*)</u>: $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3$
  - Resolem l'equació $f'(x) = 0$

$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{3\cdot 4}{3} = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \rightarrow \begin{cases} \boxed{x=-2} \\ \boxed{x=2} \end{cases}$ Punts estacionaris

  - Calculem els punts de discontinuïtat de $f(x)$:

    $f(x)$ és un polinomi, per tant, és una funció contínua en R.

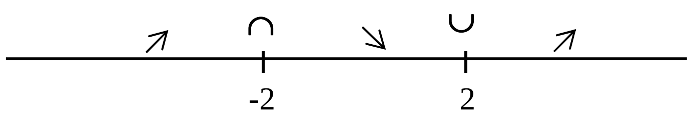
  - Estudiem el signe de $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3 = \frac{3}{4}(x-2)(x+2)$$

Intervals	$x-2$	$x+2$	f'	f
$(-\infty,-2)$	–	–	+	Creixent
$(-2,2)$	–	+	–	Decreixent
$(2,+\infty)$	+	+	+	Creixent

→ Hi ha un màxim en $x = -2$

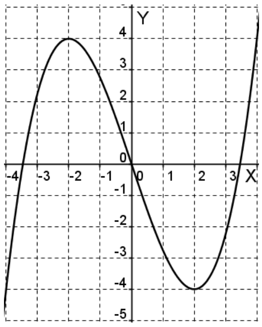
→ Hi ha un mínim en $x = 2$



- o Calculem l'ordenada dels punts estacionaris:

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x \rightarrow \begin{cases} f(-2)=\frac{1}{4}(-2)^3-3\cdot(-2)=-\frac{8}{4}+6=-2+6=\boxed{4} \rightarrow \text{Màxim}: \boxed{(-2,4)} \\ f(2)=\frac{1}{4}\cdot 2^3-3\cdot 2=\frac{8}{4}-6=2-6=\boxed{-4} \rightarrow \text{Mínim}: \boxed{(2,-4)} \end{cases}$$

- Fem un <u>esbós de la gràfica de la funció</u> a partir de les dades que hem obtingut:



<u>2.</u> Representa gràficament la funció $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$.

- Calculem el <u>domini</u> de la funció:

  El denominador de l'expressió algebraica de la funció s'anul·la quan $x=2$ i $x=-2$: $\text{Dom } f = R-\{-2,2\}$.

- Calculem les <u>asímptotes</u>:
  - o Asímptotes horitzontals:

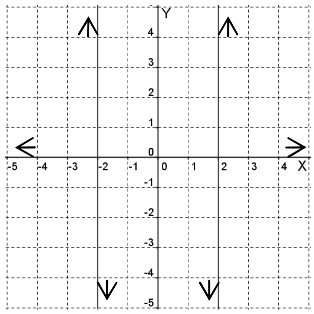
$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2-4}=0^+ \\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2-4}=0^+ \end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{y=0} \text{ és una asímptota horitzontal de } f.$$

  - o Asímptotes verticals:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{0}=\begin{cases} \lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x^2-4}=-\infty \\ \lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x^2-4}=+\infty \end{cases}$$

$\rightarrow \boxed{x=2}$ és una asímptota vertical.

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{0} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-} \frac{1}{x^2-4} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+} \frac{1}{x^2-4} = -\infty \end{cases}$$



$\rightarrow \boxed{x=-2}$ és una asímptota vertical.

- Calculem els punts de tall amb els eixos:
  - o Tall eix OX:

    $y = 0 \rightarrow \frac{1}{x^2 - 4} = 0^* \leftrightarrow 1 = 0 \rightarrow$ no té solució ($1 \neq 0$), aleshores no talla l'eix OX.
  - o Tall eix OY:

    $x = 0 \rightarrow y = f(0) = \frac{1}{0^2-4} = -\frac{1}{4} \rightarrow \boxed{\left(0, -\frac{1}{4}\right)}$ és el punt de tall amb l'eix OY.

*<u>**Nota**</u>**:** Perquè una fracció s'anul·li, el seu numerador ha de ser igual a 0:

$$\frac{a}{b} = 0 \leftrightarrow a = 0 \text{ i } b \neq 0$$

- Estudiem el creixement, el decreixement i els punts estacionaris:
  - o Calculem $f'(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{x^2-4} = \left(x^2-4\right)^{-1} \rightarrow f'(x) = -\left(x^2-4\right)^{-2} \cdot 2x = \frac{-2x}{\left(x^2-4\right)^2}$$

  - o Resolem l'equació $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = \frac{-2x}{\left(x^2-4\right)^2} = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow \boxed{x=0} \text{ Punt estacionari.}$$

  - o Calculem els punts de discontinuïtat:

$\text{Dom } f = R - \{-2, 2\} \rightarrow f(x)$ és discontínua en $x = -2$ i $x = 2$.

- Estudiem el signe de $f'(x)$:

Intervals	$-2x$	$(x^2-4)^2$	f'	f
$(-\infty,-2)$	+	+	+	Creixent
$(-2,0)$	+	+	+	Creixent
$(0,2)$	–	+	–	Decreixent
$(2,+\infty)$	–	+	–	Decreixent

→ Hi ha un màxim en $x=0$

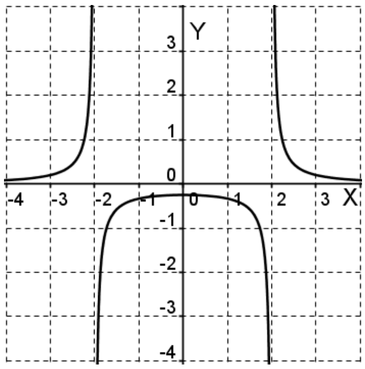
$$\nearrow \quad \nearrow \quad \cap \quad \searrow \quad \searrow$$

$$-2 \qquad 0 \qquad 2$$

- Calculem l'ordenada del punt estacionari:

$$f(0)=\frac{1}{0^2-4}=-\frac{1}{4} \longrightarrow \text{Màxim}: \boxed{\left(0,-\frac{1}{4}\right)}$$

- Fem un <u>esbós de la gràfica de la funció</u> a partir de les dades que hem obtingut:



<u>Exercicis</u>: Representa gràficament la funció $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+x^3$.

Optimització

A la vida real hi ha moltes situacions en què cal optimitzar (maximitzar o minimitzar) una funció, és a dir, calcular el valor de la variable independent que fa que el valor de la funció sigui òptim (màxim o mínim).

Per **resoldre un problema d'optimització**, seguim els passos següents:

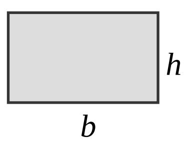
- Trobem l'expressió algebraica de la funció que cal optimitzar i l'escrivim en funció d'una sola variable.
- Calculem el domini de la funció en el context del problema.
- Calculem els extrems relatius de la funció.
- Expressem adequadament la solució i analitzem si és correcta en el context del problema. Comprovem que el màxim o mínim relatiu que hem trobat també és el màxim o mínim absolut del problema, ja que és possible que no sigui així.

Exemples:

1. Tenim 40 metres de tela metàl·lica per construir un tancat rectangular per al bestiar. Calcula les dimensions del rectangle perquè l'àrea del tancat sigui màxima.

De tots els rectangles de 40 m de perímetre, cal trobar el d'àrea màxima.

- Trobem l'expressió algebraica de la funció que cal optimitzar i l'escrivim en funció d'una sola variable.



$A = b \cdot h$ és la funció que cal maximitzar. Depèn de dues variables.

Expressem la funció àrea en funció d'una sola variable, sabent que el perímetre fa 40 m:

$$\left.\begin{array}{l} A = b \cdot h \\ P = 2b + 2h = 40 \rightarrow b + h = 20 \rightarrow \boxed{h = 20 - b} \end{array}\right\}^{*} \rightarrow A = b \cdot (20 - b) = -b^2 + 20b$$

$\boxed{A(b) = -b^2 + 20b}$ $\rightarrow$ Funció que cal maximitzar.

- Calculem el domini de la funció en el context del problema:

  $\text{Dom } f = (0, 20)$ (cada costat mesura més de 0 m i menys de 20 m)

- Calculem els extrems relatius de la funció:

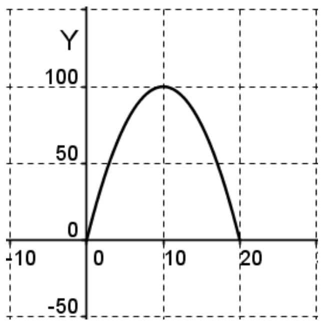
  $$A'(b) = -2b + 20 = 0 \rightarrow -2b = -20 \rightarrow b = \frac{-20}{-2} = \boxed{10}$$

  Comprovem que és un màxim:

Intervals	$-2b + 20$	f'	f
$(0,10)$	+	+	Creixent
$(10,20)$	–	–	Decreixent

→ Hi ha un màxim en $b = 10$

Calculem h quan $b = 10$: $^{*}h = 20 - b = 20 - 10 = \boxed{10}$



- Expressem adequadament la solució i analitzem si és correcta en el context del problema:

  El rectangle d'àrea màxima és el quadrat (el qual és un cas particular de rectangle) de 10 metres de costat. La solució és coherent amb l'enunciat i, com que no hi ha més extrems relatius, *b* = *1*0 és el màxim absolut (es pot veure fàcilment en el gràfic).

  El tancat ha de fer 10 m x 10 m perquè la seva àrea sigui màxima.

2. Els costos mensuals d'una empresa que fabrica un determinat producte vénen donats per la funció següent (en euros):

$f(x) = x^2 - 240x + 30.000$, en què x és el nombre d'unitats fabricades en un mes.

Calcula el nombre d'unitats que s'han de fabricar en un mes perquè els costos mensuals siguin mínims. Indica quins seran aquests costos mínims.

- Trobem l'expressió algebraica de la funció que cal optimitzar i l'escrivim en funció d'una sola variable.

  L'enunciat del problema ens dóna la funció que cal maximitzar: $f(x) = x^2 - 240x + 30.000$

- Calculem el domini de la funció en el context del problema: $\text{Dom } f = [0, +\infty)$

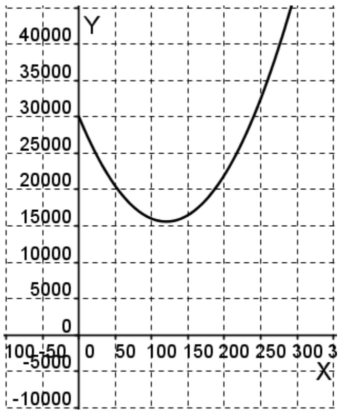
- Calculem els extrems relatius de la funció:

  $f'(x) = 2x - 240 = 0 \rightarrow 2x = 240 \rightarrow x = \frac{240}{2} = \boxed{120}$

  Comprovem que és un mínim:

Intervals	$2x - 240$	f'	f
$(0,120)$	$-$	$-$	Decreixent
$(120,+\infty)$	$+$	$+$	Creixent

→ Hi ha un mínim en $x = 120$



Calculem els costos mínims:

$$f(120) = 120^2 - 240 \cdot 120 + 30.000 = \boxed{15.600\ €}$$

- Expressem adequadament la solució i analitzem si és correcta en el context del problema:

  La solució és coherent amb l'enunciat i, com que no hi ha més extrems relatius, $x = 120$ és el mínim absolut (es pot veure fàcilment en el gràfic).

S'han de fabricar 120 unitats en un mes perquè els costos mensuals siguin mínims. Aquests costos mínims seran de 15.600 €.

Exercici: Troba dos nombres positius que sumin 14 i que el seu producte sigui màxim.

Sol.: Els dos nombres són 7 i 7