TEMA 6: NOMBRES COMPLEXOS

1. El conjunt dels nombres complexos.

2. Operacions amb nombres complexos.

1. EL CONJUNT DELS NOMBRES COMPLEXOS

Necessitat dels nombres complexos

En el conjunt dels nombres reals $\mathbb{R}$ no podem calcular les arrels d'índex parells dels nombres negatius. Per tal de poder-les calcular, s'amplia aquest conjunt. El nou conjunt s'anomena **conjunt dels nombres complexos**, i es representa amb $\mathbb{C}$.

Així, les equacions de segon grau que no tenen solució en $\mathbb{R}$ sí que en tenen en el conjunt $\mathbb{C}$.

Exemples:

1. $\sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$ **2.** $x^2 + 2 = 0 \rightarrow$ No té solució en $\mathbb{R}$

Aquest conjunt té moltes aplicacions dintre de les matemàtiques. Nosaltres veurem només algunes definicions i resultats bàsics sobre aquest nou conjunt de nombres.

Construcció dels nombres complexos

Es defineix la **unitat imaginària** com $\sqrt{-1}$. Es representa amb i :

$$\boxed{\boldsymbol{i = \sqrt{-1} \rightarrow i^2 = -1}}$$

Un **nombre complex** és un nombre de la forma $\boldsymbol{a+bi}$, on a i b són dos nombres reals.

L'expressió $\boldsymbol{a+bi}$ és la **forma binòmica** d'un nombre complex: $\boldsymbol{a}$ s'anomena **part real** i $\boldsymbol{b}$**, part imaginària.**

$$z = \underbrace{a}_{\text{Part real}} + \overbrace{b}^{\text{Part imaginària}} i \rightarrow \textbf{forma binòmica d'un nombre complex} \quad \begin{cases} \text{Si } b=0, \ z \text{ és un nombre real} \\ \text{Si } a=0, \ z \text{ és un nombre imaginari} \end{cases}$$

Exemples:

1. $5+2i \rightarrow \begin{cases} \text{Part real} = 5 \\ \text{Part imàginaria} = 2 \end{cases}$ **2.** $-3-i \rightarrow \begin{cases} \text{Part real} = -3 \\ \text{Part imaginària} = -1 \end{cases}$

3. $2i \rightarrow \begin{cases} \text{Part real} = 0 \\ \text{Part imaginària} = 2 \end{cases} \rightarrow$ Nombre imaginari

4. $4 \rightarrow \begin{cases} \text{Part real} = 4 \\ \text{Part imaginària} = 0 \end{cases} \rightarrow$ Nombre real

Vegem exemples de resolució d'equacions de segon grau en el conjunt dels nombres complexos:

Exemple: **Resol les equacions següents en el conjunt dels nombres complexos:**

a) $\mathbf{x^2 + 2 = 0} \rightarrow x^2 = -2 \rightarrow x = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}\cdot\sqrt{-1} = \pm\sqrt{2}\,i = \begin{cases} \boxed{\sqrt{2}\,i} \\ \boxed{-\sqrt{2}\,i} \end{cases}$

b) $\mathbf{x^2 - 6x + 34 = 0} \rightarrow x = \dfrac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot 1\cdot 34}}{2\cdot 1} = \dfrac{6 \pm \sqrt{-100}}{2} = \dfrac{6 \pm 10i}{2} = 3 \pm 5i = \begin{cases} \boxed{3+5i} \\ \boxed{3-5i} \end{cases}$

Exercici: Resol les equacions següents en el conjunt dels nombres complexos:

a) $x^2 + 4 = 0$

b) $x^2 + 4x + 13 = 0$

Sol.: a) $2i$; $-2i$ **b)** $-2+3i$; $-2-3i$

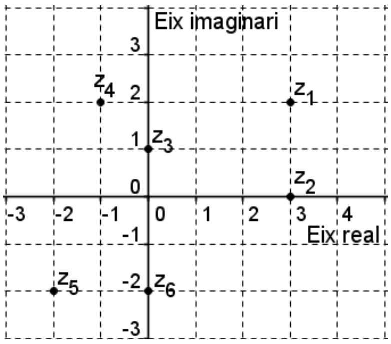
Representació gràfica de nombres complexos

Un nombre complex es pot representar en un sistema d'eixos cartesians en què l'eix horitzontal s'anomena **eix real** i l'eix vertical s'anomena **eix imaginari.** El pla definit per aquests eixos rep el nom de **pla complex**.

El nombre complex $a + bi$ es representa amb el punt $(\boldsymbol{a,b})$, anomenat **afix** del nombre complex.

Exemple: Representa els afixos dels nombres complexos següents:

$$z_1 = 3+2i$$
$$z_2 = 3$$
$$z_3 = i$$
$$z_4 = -1+2i$$
$$z_5 = -2-2i$$
$$z_6 = -2i$$

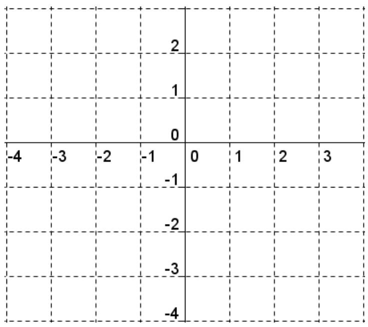


Exercici: Representa els afixos dels nombres complexos següents:

$z_1 = 1-3i$ $\quad z_4 = -3+3i$

$z_2 = 2i$ $\quad z_5 = -1-2i$

$z_3 = -i$ $\quad z_6 = -3$



Igualtat de nombres complexos

Dos nombres complexos $z = a+bi$ i $z' = a'+b'i$ són **iguals** si, i només si, les seves parts reals i imaginàries són iguals:

$$\boxed{z = z' \leftrightarrow \quad a = a' \text{ i } \; b = b'}$$

Oposat i conjugat d'un nombre complex

L'**oposat** d'un nombre complex $z = a+bi$ és el nombre $\boldsymbol{-z = -a - bi}$

El **conjugat** d'un nombre complex $z = a+bi$ és el nombre $\boldsymbol{\bar{z} = a - bi}$.

Exemple: **Calcula l'oposat i el conjugat de $\boldsymbol{z = -5+2i}$.**

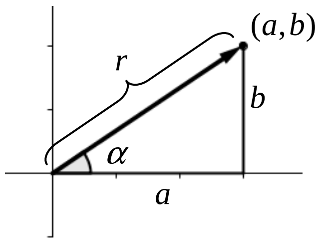
Oposat: $-z = 5-2i$ Conjugat: $\bar{z} = -5-2i$

Exercici: Calcula l'oposat i el conjugat de $z = 4-i$.

Quan una equació de segon grau no té solució en el conjunt dels nombres reals, les solucions en el conjunt $\mathbb{C}$ són dos nombres complexos conjugats entre ells (un és conjugat de l'altre). Vegeu els exemples i l'exercici de l'apartat *Construcció dels nombres complexos*.

Forma polar d'un nombre complex

La **forma polar** d'un nombre complex $z = a + bi$ és la forma polar del vector de posició del seu afix, és a dir, la forma polar del vector (a, b).



$$\boldsymbol{z = r_\alpha} \rightarrow \begin{cases} r = |(a,b)| = \sqrt{a^2+b^2} \\ \alpha \text{ angle que forma el vector (a, b) amb la part positiva de l'eix real :} \\ \qquad \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{b}{a} \end{cases}$$

Per passar de forma polar a forma binòmica apliquem la trigonometria:

$$\cos\alpha = \frac{a}{r} \rightarrow \boxed{a = r\cdot\cos\alpha} \qquad\qquad \sin\alpha = \frac{b}{r} \rightarrow \boxed{b = r\cdot\sin\alpha}$$

Exemples:

1. Escriu el nombre complex $z = -5 + 2i$ en forma polar.

$$r = \sqrt{(-5)^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{-5} = -0,4 \rightarrow \alpha = \begin{cases} -21,8^\circ \\ -21,8^\circ + 180^\circ = \boxed{158,2^\circ} \\ (z \text{ es troba en el segon quadrant}) \end{cases} \qquad \rightarrow \boxed{z = \sqrt{29}_{158,2^\circ}}$$

2. Escriu el nombre complex $z = 8_{60^\circ}$ en forma binòmica.

$$a = 8\cdot\cos 60^\circ = 4$$

$$b = 8\cdot\sin 60^\circ = 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \approx 6,93 \qquad \rightarrow \boxed{z = 4 + 4\sqrt{3}\,i}$$

Exercicis:

1. Escriu els nombres complexos següents en forma polar:

a) $-2+2i$

b) -3

c) $2i$

2. Escriu els nombres complexos següents en forma binòmica:

a) 7_{150°

b) 6_{180°

Sol.: **1. a)** $\sqrt{8}_{135^\circ} = 2\sqrt{2}_{135^\circ}$ **b)** 3_{180° **c)** 2_{90° **2. a)** $-\frac{7\sqrt{3}}{2}+\frac{7}{2}i$ **b)** -6

2. OPERACIONS AMB NOMBRES COMPLEXOS

Suma i resta de nombres complexos

Per **sumar i restar nombres complexos en forma binòmica**, sumem i restem per separat les seves parts reals i imaginàries.

Donats dos nombres complexos $z = a + bi$ i $z' = a' + b'i$:

$$\boldsymbol{z + z' = (a + a') + (b + b')i} \qquad \boldsymbol{z - z' = (a - a') + (b - b')i}$$

Exemple: **Donats els nombres complexos $z = 3 + 4i$ i $z' = -2 + 5i$, calcula $z + z'$ i $z - z'$.**

$$z + z' = (3 + 4i) + (-2 + 5i) = (3 + (-2)) + (4 + 5)i = \boxed{1 + 9i}$$

$$z - z' = (3 + 4i) - (-2 + 5i) = (3 - (-2)) + (4 - 5)i = \boxed{5 - i}$$

Exercici: Donats els nombres complexos $z = -1 + 7i$ i $z' = 3 - 6i$, calcula $z + z'$ i $z - z'$.

Sol.: $z + z' = 2 + i$; $z - z' = -4 + 13i$

Multiplicació de nombres complexos

En forma binòmica

Per **multiplicar dos nombres complexos en forma binòmica**, multipliquem cada sumand del primer nombre pels sumands del segon (propietat distributiva de la multiplicació respecte de la suma), tenint en compte que $i^2 = -1$.

Donats dos nombres complexos $z = a + bi$ i $z' = a' + b'i$:

$$\boldsymbol{z \cdot z' = (a + b\,i) \cdot (a' + b'\,i) = aa' + ab'i + ba'i + bb'i^2 = (aa' - bb') + (ab' + ba')i}$$

Exemple: **Donats els nombres complexos $z = 3 + 4i$ i $z' = -2 + 5i$, calcula:**

a) $z \cdot z' = (3+4i)\cdot(-2+5i) = 3\cdot(-2) + 3\cdot 5i + 4\cdot(-2)i + (4\cdot 5)i^2 = -6+15i-8i-20 = \boxed{-26+7i}$

b) $3z = 3\cdot(3+4i) = 3\cdot 3 + 3\cdot 4i = \boxed{9+12i}$ (el producte d'un nombre real per un nombre complex és un cas particular del producte de dos nombres complexos, en què un d'ells és real)

c) $3z + 2z' = 3\cdot(3+4i) + 2\cdot(-2+5i) = 9+12i-4+10i = \boxed{5+22i}$

Exercici: Donats els nombres complexos $z = -1+7i$ i $z' = 3-6i$, calcula:

a) $z \cdot z' =$

b) $3z + 2z' =$

Sol.: a) $39+27i$ **b)** $3+9i$

En forma polar

Per **multiplicar dos nombres complexos en forma polar**, multipliquem els seus mòduls i sumem els seus arguments.

Donats dos nombres complexos $z = r_\alpha$ i $z' = r'_\beta$:

$$\boxed{z \cdot z' = (r \cdot r')_{\alpha+\beta}}$$

Exemple: **Donats els nombres complexos $z = 3_{40^\circ}$ i $z' = 2_{25^\circ}$, calcula $z \cdot z'$.**

$$z \cdot z' = 3_{40^\circ} \cdot 2_{25^\circ} = (3\cdot 2)_{40^\circ+25^\circ} = \boxed{6_{65^\circ}}$$

Exercici: Donats els nombres complexos $z = 12_{120°}$ i $z' = 3_{32°}$, calcula $z \cdot z'$.

Sol.: $36_{152°}$

Divisió de nombres complexos

En forma binòmica

Per **dividir nombres complexos en forma binòmica**, els expressem en forma de fracció i multipliquem el numerador i el denominador pel conjugat del denominador.

Donats dos nombres complexos $z = a + bi$ i $z' = a' + b'i$:

$$\frac{a+bi}{a'+b'i} = \frac{(a+bi)\cdot(a'-b'i)}{(a'+b'i)\cdot(a'-b'i)} = \frac{aa'+ab'i+ba'i+bb'i^2}{a'^2-b'^2i^2} = \frac{(aa'-bb')+(ab'+ba')i}{a'^2+b'^2} =$$

$$= \boxed{\frac{(aa'-bb')}{a'^2+b'^2} + \frac{(ab'+ba')}{a'^2+b'^2}i}$$

Exemple: **Donats els nombres complexos $z = 3 + 4i$ i $z' = -2 + 5i$, calcula $z \div z'$.**

$$z \div z' = \frac{z}{z'} = \frac{3+4i}{-2+5i} = \frac{(3+4i)\cdot(-2-5i)}{(-2+5i)\cdot(-2-5i)} = \frac{3\cdot(-2)+3\cdot(-5i)+4i\cdot(-2)+4i\cdot(-5i)}{(-2)^2+5^2}$$

$$= \frac{-6-15i-8i-20i^2}{29} = \frac{-6-15i-8i+20}{29} = \frac{14-23i}{29} = \boxed{\frac{14}{29} - \frac{23}{29}i}$$

Exercici: Donats els nombres complexos $z = -1 + 7i$ i $z' = 3 - 6i$, calcula $z \div z'$.

Sol.: $-1 + \frac{1}{3}i$

En forma polar

Per **dividir dos nombres complexos en forma polar**, dividim els seus mòduls i restem els seus arguments.

Donats dos nombres complexos $z = r_\alpha$ i $z' = r'_\beta$:

$$\boxed{\boldsymbol{z : z' = \left(r : r'\right)_{\alpha\text{-}\beta}}}$$

Exemple: **Donats els nombres complexos $z = 3_{40^\circ}$ i $z' = 2_{25^\circ}$, calcula $z : z'$.**

$$z : z' = 3_{40^\circ} : 2_{25^\circ} = \left(\frac{3}{2}\right)_{40^\circ - 25^\circ} = \boxed{\left(\frac{3}{2}\right)_{15^\circ}}$$

Exercici: Donats els nombres complexos $z = 12_{120^\circ}$ i $z' = 3_{32^\circ}$, calcula $z : z'$.

Sol.: 4_{88°

Potències de nombres complexos

Potències de la unitat imaginària

Vegem el valor de les primeres potències de la unitat imaginària i:

$i^1 = i$ $\qquad$ $i^2 = -1$ $\qquad$ $i^3 = i^2 \cdot i = -i$

$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1$ $\qquad$ $i^5 = i^4 \cdot i = i$

Així, les potències de i prenen només els valors $\boldsymbol{i, -1, -i}$ i $\boldsymbol{1}$, els quals es van repetint successivament en cicles de quatre. Cada quatre potències de i el resultat és 1 ($i^4 = 1$).

Per tant, $i^n = i^r$, on r és el residu de la divisió $n : 4$.

<u>Exemple</u>: **Calcula:**

a) $\boldsymbol{i^{14}} \rightarrow i^{14} = \underbrace{\underbrace{i^4}_{1} \cdot \underbrace{i^4}_{1} \cdot \underbrace{i^4}_{1}}_{\text{tres vegades}} \cdot i^2 = i^{\boxed{2}} = \boxed{-1}$

$$\begin{array}{r|l} 14 & 4 \\ \hline 2 & 3 \end{array} \longrightarrow \text{3 vegades } i^4$$

b) $\boldsymbol{i^{55}} \rightarrow i^{55} = \underbrace{\underbrace{i^4}_{1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{i^4}_{1}}_{\text{13 vegades}} \cdot i^3 = i^{\boxed{3}} = \boxed{-i}$

$$\begin{array}{r|l} 55 & 4 \\ \hline 3 & 13 \end{array} \longrightarrow \text{13 vegades } i^4$$

<u>Exercici</u>: Calcula:

a) i^{21}

b) i^{120}

Sol.: a) i **b)** *1*

<u>Potències de nombres complexos en forma binòmica</u>

Per calcular $(a+bi)^n$, hem de multiplicar $a+bi$ per ell mateix n vegades.

<u>Exemple</u>: **Calcula** $\boldsymbol{(3+2i)^3}$**.**

$$(3+2i)^3 = (3+2i)^2 \cdot (3+2i) = \left(9+2\cdot 3\cdot 2i+(2i)^2\right)\cdot(3+2i) = (9+12i-4)\cdot(3+2i) =$$

$$= (5+12i)\cdot(3+2i) = 5\cdot 3+5\cdot 2i+12\cdot 3i+12\cdot 2i^2 = 15+10i+36i-24 = \boxed{-9+46i}$$

<u>Exercici</u>: Calcula $(1-5i)^3$.

Sol.: $-74+110i$

Potències de nombres complexos en forma polar

Calcular potències en forma polar és més senzill que fer-ho en forma binòmica. Vegem-ho:

$$\left(r_\alpha\right)^n = \underbrace{r_\alpha \cdot \ldots \cdot r_\alpha}_{n \text{ vegades}} = \underbrace{(r \cdot \ldots \cdot r)}_{n \text{ vegades}} \underbrace{{}_{\alpha+\ldots+\alpha}}_{n \text{ vegades}} = r^n{}_{n\cdot\alpha}$$

Per **elevar a *n* un nombre complex en forma polar**, elevem el seu mòdul a n i multipliquem el seu argument per n :

$$\boxed{\left(r_\alpha\right)^n = \left(r^n\right)_{n\cdot\alpha}}$$

Exemple: **Calcula** $\left(3_{40^\circ}\right)^3$ i $\left(4_{200^\circ}\right)^5$. $\left(3_{40^\circ}\right)^3 = \left(3^3\right)_{3\cdot 40} = \boxed{27_{120^\circ}}$ $\quad$ $\left(4_{200^\circ}\right)^5 = \left(4^5\right)_{5\cdot 200^\circ} = 1024_{1000^\circ} = \boxed{1024_{280^\circ}}$
Exercici: **Calcula** $\left(5_{35^\circ}\right)^4$ i $\left(2_{153^\circ}\right)^7$. **Sol.:** 625_{140° ; 128_{351°

Radicació de nombres complexos

Calcularem les arrels de nombres complexos en forma polar, perquè és més senzill.

Una **arrel *n*-èsima** d'un nombre complex r_α és un nombre complex r'_β que verifica $\left(r'_\beta\right)^n = r_\alpha$.

$$\sqrt[n]{r_\alpha} = r'_\beta \qquad \leftrightarrow \qquad \left(r'_\beta\right)^n = r_\alpha$$

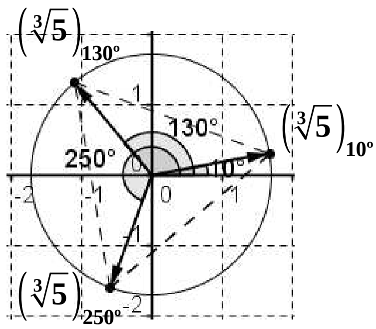
Tot nombre complex diferent de zero té n arrels n-èsimes, que tenen el mateix mòdul i diferents arguments. Vegem com es calculen:

$$\left(r'_\beta\right)^n = r_\alpha \rightarrow \left[\left(r'\right)^n\right]_{n\cdot\beta} = r_\alpha \rightarrow \begin{cases} \left(r'\right)^n = r \rightarrow \boxed{r' = \sqrt[n]{r}} \\ n\cdot\beta = \alpha + 360^\circ k \rightarrow \boxed{\beta = \dfrac{\alpha + 360^\circ k}{n}} \end{cases} \text{ on } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Exemples

1. **Calcula** $\sqrt[3]{5_{30^\circ}}$

$$\sqrt[3]{5_{30^\circ}} = \left(\sqrt[3]{5}\right)_{\frac{30^\circ+360^\circ k}{3}} \rightarrow \begin{cases} k=0 \rightarrow \left(\sqrt[3]{5}\right)_{\frac{30^\circ}{3}} = \boxed{\left(\sqrt[3]{5}\right)_{10^\circ}} \\ k=1 \rightarrow \left(\sqrt[3]{5}\right)_{\frac{30^\circ+360^\circ\cdot 1}{3}} = \boxed{\left(\sqrt[3]{5}\right)_{130^\circ}} \\ k=2 \rightarrow \left(\sqrt[3]{5}\right)_{\frac{30^\circ+360^\circ\cdot 2}{3}} = \boxed{\left(\sqrt[3]{5}\right)_{250^\circ}} \end{cases}$$



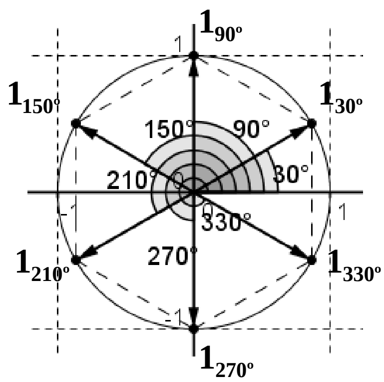
Prova:

$$\left(\left(\sqrt[3]{5}\right)_{10^\circ}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{5}\right)^3_{3\cdot 10^\circ} = \boxed{5_{30^\circ}}; \qquad \left(\left(\sqrt[3]{5}\right)_{130^\circ}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{5}\right)^3_{3\cdot 130^\circ} = 5_{390^\circ} = \boxed{5_{30^\circ}};$$

$$\left(\left(\sqrt[3]{5}\right)_{250^\circ}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{5}\right)^3_{3\cdot 250^\circ} = 5_{750^\circ} = \boxed{5_{30^\circ}}$$

2. **Calcula** $\sqrt[6]{-1} = \sqrt[6]{1_{180^\circ}}$

$$\sqrt[6]{1_{180^\circ}} = \left(\sqrt[6]{1}\right)_{\frac{180^\circ+360^\circ k}{6}} \rightarrow \begin{cases} k=0 \rightarrow 1_{\frac{180^\circ}{6}} = \boxed{1_{30^\circ}} \\ k=1 \rightarrow 1_{\frac{180^\circ+360^\circ\cdot 1}{6}} = \boxed{1_{90^\circ}} \\ k=2 \rightarrow 1_{\frac{180^\circ+360^\circ\cdot 2}{6}} = \boxed{1_{150^\circ}} \\ k=3 \rightarrow 1_{\frac{180^\circ+360^\circ\cdot 3}{6}} = \boxed{1_{210^\circ}} \\ k=4 \rightarrow 1_{\frac{180^\circ+360^\circ\cdot 4}{6}} = \boxed{1_{270^\circ}} \\ k=5 \rightarrow 1_{\frac{180^\circ+360^\circ\cdot 5}{6}} = \boxed{1_{330^\circ}} \end{cases}$$



Prova:

$$\left(1_{30^\circ}\right)^6 = 1^6_{6\cdot 30^\circ} = \boxed{1_{180^\circ}}; \quad \left(1_{90^\circ}\right)^6 = 1^6_{6\cdot 90^\circ} = 1_{540^\circ} = \boxed{1_{180^\circ}}; \quad \left(1_{150^\circ}\right)^6 = 1^6_{6\cdot 150^\circ} = 1_{900^\circ} = \boxed{1_{180^\circ}}$$

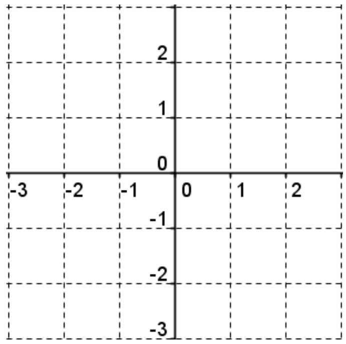
$$\left(1_{210^\circ}\right)^6 = 1^6_{6\cdot 210^\circ} = 1_{1.260^\circ} = \boxed{1_{180^\circ}}; \quad \left(1_{270^\circ}\right)^6 = 1^6_{6\cdot 270^\circ} = 1_{1.620^\circ} = \boxed{1_{180^\circ}};$$

$$\left(1_{330^\circ}\right)^6 = 1^6_{6\cdot 330^\circ} = 1_{1.980^\circ} = \boxed{1_{180^\circ}}$$

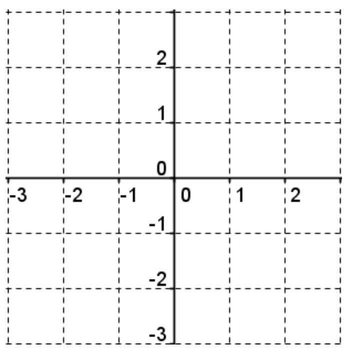
En la representació gràfica podem observar que, els afixos de les arrels n-èsimes (per a $n > 2$) d'un nombre complex són els vèrtexs d'un polígon regular de n costats, inscrit en una circumferència de radi igual al mòdul de les arrels.

Exercicis:

a) Calcula $\sqrt[3]{27_{90^\circ}}$. Representa les solucions gràficament i fes-ne la prova.



b) Calcula les arrels cinquenes de 32 i representa-les gràficament.



Sol.: a) 3_{30°; 3_{150°; $3_{270^\circ} = -3i$ **b)** 2_{0°; 2_{72°; 2_{144°; 2_{216°; 2_{288°

Exercicis

1. Indica la part real i la part imaginària dels nombres complexos següents:

a) $-3+5i$ **b)** $3+i$ **c)** $-2-i$ **d)** $-5i$ **e)** -10

2. Indica quin nombre complex de l'exercici anterior és real i quin és imaginari.

3. Calcula, en el conjunt dels nombres complexos, les arrels quadrades dels nombres següents:

a) -25 **b)** -3 **c)** -49 **d)** $-\frac{9}{16}$ **e)** $-\frac{1}{4}$ **f)** -5

4. Resol les equacions de segon grau següents, en el conjunt dels nombres complexos:

a) $x^2+9=0$ **e)** $-5x^2-3=0$ **i)** $x^2+x+1=0$

b) $x^2+1=0$ **f)** $x^2-2x+2=0$ **j)** $2x^2-x+1=0$

c) $x^2+3=0$ **g)** $x^2+10x+29=0$ **k)** $x^2+14x+50=0$

d) $2x^2+8=0$ **h)** $8x^2-4x+5=0$ **l)** $x^2-x+8=0$

5. Representa gràficament, en uns eixos cartesians, els afixos dels nombres complexos següents:

$z_1=-1+3i$ $z_2=-3-2i$ $z_3=-4$ $z_4=5i$ $z_5=-3i$ $z_6=2-i$ $z_7=4+i$

6. Calcula l'oposat i el conjugat dels nombres complexos següents:

a) $4+2i$ **b)** $6-i$ **c)** $-5i$ **d)** 4 **e)** $-1+i$ **f)** $-7-9i$

7. Expressa els nombres complexos següents en forma polar:

a) $4+3i$ **b)** $-4-3i$ **c)** $1-i$ **d)** $-2+3i$ **e)** 5 **f)** -3 **g)** $2i$ **h)** $-2i$

8. Expressa els nombres complexos següents en forma binòmica:

a) 9_{25° **b)** 1_{45° **c)** 3_{42° **d)** 7_{0° **e)** 7_{90° **f)** 7_{180° **g)** 7_{270°

9. Donats els nombres complexos

$z_1 = 1+3i \qquad z_2 = -5+4i \qquad z_3 = -3-i \qquad z_4 = 2i$

Calcula:

a) $z_1 + z_2$ **e)** $z_1 - z_2$ **i)** $z_1 \cdot z_2$ **m)** $z_1 : z_2$ **q)** $z_1^{\,2}$

b) $z_1 + z_3$ **f)** $z_1 - z_3$ **j)** $z_1 \cdot z_3$ **n)** $z_1 : z_3$ **r)** $z_2^{\,3}$

c) $z_2 + z_3$ **g)** $z_2 - z_3$ **k)** $z_2 \cdot z_3$ **o)** $z_2 : z_3$ **s)** $z_4^{\,3}$

d) $z_1 + z_4$ **h)** $z_1 - z_4$ **l)** $z_1 \cdot z_4$ **p)** $z_1 : z_4$ **t)** $z_4^{\,10}$

10. Donats els nombres complexos

$z_1 = 2_{60^\circ} \qquad z_2 = 5_{30^\circ} \qquad z_3 = 1_{150^\circ}$

Calcula:

a) $z_1 \cdot z_2$ **c)** $z_2 \cdot z_3$ **e)** $z_1 : z_3$ **g)** $z_1^{\,3}$ **i)** $z_3^{\,5}$ **k)** $\sqrt{z_2}$

b) $z_1 \cdot z_3$ **d)** $z_1 : z_2$ **f)** $z_2 : z_3$ **h)** $z_2^{\,2}$ **j)** $\sqrt[4]{z_1}$ **l)** $\sqrt[6]{z_3}$