Unitat 2

EQUACIONS DE PRIMER GRAU

què treballaràs?

En acabar la unitat has de ser capaç de:

- **Resoldre equacions de primer grau.**
- **Trobar la solució a problemes utilitzant equacions de primer grau.**

1. Equació

Quan tenim dues expressions algebraiques igualades, per exemple $x + 3x = 4x$, la igualtat es compleix per qualsevol valor que donem a la x. Comprovem-ho. Si donem a la x valor 1, tenim $1 + 3 = 4$, la igualtat és certa; si donem a la x valor 2 tenim $2 + 6 = 8$, la igualtat també és certa. Podríem anar donant valors a la x i veuríem que aquesta igualtat es compleix sempre.

Es tracta d'una **identitat**.

En canvi, la igualtat $x - 8 = 2$ només es compleix quan la x val 10, ja que $10 - 8 = 2$.

Es tracta d'una **equació**.

La lletra que intervé en una equació s'anomena **incògnita** i és el nombre que ens és desconegut.

Quan resolem una equació calculem el valor de la incògnita que fa que la igualtat sigui certa. Aquest valor és la **solució** de l'equació.

Equacions són les igualtats establertes entre expressions algebraiques que tenen una única solució.

Exemple

$x + 2 = 5$ és una equació en la qual:
x és la incògnita
3 és la solució, perquè $3 + 2 = 5$

Parts d'una equació

Imaginem-nos l'equació $3x + 7 = 5x - 9$.

Aquesta equació consta de dos **membres** i de quatre **termes**. Anomenem primer membre a l'expressió que hi ha a l'esquerra de la igualtat i segon membre a l'expressió que hi ha a la dreta de la igualtat.

primer membre		segon membre
$3x + 7$	=	$5x - 9$
termes		termes

Grau d'una equació és l'exponent més gran al qual està elevada la incògnita.

$x + 6 = 3$ és una equació de **primer grau**.
$x^2 + 5x = -6$ és una equació de **segon grau**.

Equacions equivalents

Equacions equivalents són les que tenen la mateixa solució.

L'equació $x - 3 = 5$ té per solució 8 perquè $8 - 3 = 5$

La solució de l'equació $2x = 16$ també és 8, perquè $2 \cdot 8 = 16$

Per tant, totes dues equacions són equivalents.

2. Propietats de les equacions

En tota equació els canvis efectuats en un membre s'han de fer també a l'altre membre, perquè la solució de l'equació continuï essent la mateixa.

- L'equació $x + 3 = 7$ té per solució $x = 4$, ja que $4 + 3 = 7$.
  Si sumen 2 al primer membre ho hem de fer també al segon membre, perquè la solució continuï essent la mateixa.
  $x + 3 + 2 = 7 + 2$
  La nova equació $x + 5 = 9$ és equivalent a l'anterior perquè té la mateixa solució, $x = 4$, ja que
  $4 + 5 = 9$.

- Tornem a l'equació anterior $x + 3 = 7$.
  Si restem 2 al primer membre ho hem de fer també al segon membre perquè la solució de l'equació no variï.
  $x + 3 - 2 = 7 - 2$
  La nova equació és $x + 1 = 5$ i és equivalent a l'anterior perquè la seva solució és també $x = 4$, ja que es compleix que $4 + 1 = 5$.
  Per tant,

Si sumem o restem un mateix nombre als dos membres d'una equació obtenim una equació equivalent a la primera.

- L'equació $x + 4 = 10$ té per solució $x = 6$, perquè $6 + 4 = 10$.
  Si ara multipliquem el primer i el segon membre per 2, l'equació obtinguda és equivalent a la primera.
  $2(x+4) = 2\cdot 10$
  $2x + 8 = 20$
  Aquesta nova equació és equivalent a la primera ja que té la mateixa solució, $x = 6$. Es compleix que $2\cdot 6 + 8 = 20$.

- Si en l'equació anterior, $x + 4 = 10$, dividim el primer i el segon membre per 2, l'equació obtinguda és equivalent a la primera.

$$\frac{x}{2} + \frac{4}{2} = \frac{10}{2}$$

$$\frac{x}{2} + 2 = 5$$

  és equivalent ja que té per solució la mateixa que la primera, és a dir, $x = 6$.

  Es compleix que $\frac{6}{2} + 2 = 5$

Per tant,

Si multipliquem o dividim per un mateix nombre els dos membres d'una equació obtenim una equació equivalent a la primera.

- L'equació $5 - x = 3$ té per solució $x = 2$ perquè $5 - 2 = 3$.
  Si canviem el signe dels termes del primer membre de l'equació hem de canviar el signe dels del segon membre.
  Així l'equació quedarà $-5 + x = -3$ que és una equació equivalent a la primera perquè la seva solució és també $x = 2$.
  Comprovem-ho: $-5 + 2 = -3$.
  Per tant,

Si canviem els signes de tots els termes d'una equació s'obté una equació equivalent a la primera.

3. Resolució d'equacions de primer grau

Per resoldre una equació hem de transformar-la en una del tipus més senzill possible i després deixar la incògnita sola en un membre, d'això se'n diu aïllar la incògnita.

Per aprendre a resoldre equacions de primer grau, les hem classificades en cinc tipus, de les més senzilles a les més complicades. Cada nou tipus introdueix un grau més de dificultat que l'anterior.

Dins de cada tipus utilitzem exemples per aprendre el procediment de resoldre equacions.

Cada exemple té una característica nova que has d'aprendre bé abans de passar a l'exemple següent.

Tipus I: Equacions en les quals la incògnita hi és una sola vegada

Exemple 1

Calculem la solució de l'equació $x + 4 = 5$.
Primer hem d'aïllar la incògnita, és a dir, posar $x = ...$
En aquest cas sobra el 4 en el primer membre. Per treure'l restem 4 als dos membres. Estem aplicant una propietat de les equacions equivalents: si sumen o restem un nombre als dos membres d'una equació, aquesta no varia.
$x + 4 - 4 = 5 - 4$
Fem les operacions
$x + 0 = 5 - 4$
$x = 1$ és la solució de l'equació.
De forma més senzilla, podem dir que el que hem fet és canviar el 4 de membre. Quan algun terme canvia de membre ho fa fent l'operació contrària, en el cas del 4 que estava sumant passa a l'altre membre restant.

Exemple 2

Calculem la solució de l'equació $3 - x = 8$
En aquest cas per tenir la x sola, ens sobra el 3. Podem restar 3 als dos membres o bé passar directament el 3, restant, al segon membre.
$3 - x - 3 = 8 - 3$
$-x = 8 - 3$
$-x = 5$

Per donar el resultat d'una equació la x ha de portar al davant el signe +. Recorda que si canviem el signe de tots els termes d'una equació, el resultat de l'equació no varia.
Per tant, podem escriure $x = -5$, que és la solució de l'equació.

Exemple 3

Solucionem la següent equació: $5 = 11 - x$
En aquest cas per tenir la x sola ens sobra l'11. El passem restant al primer membre.
$5 - 11 = -x$
$-6 = -x$
Canviem el signe dels dos termes, perquè la x ha de portar al davant el signe +.
$6 = x$ o bé $x = 6$ és la solució de l'equació.

Exemple 4

Calculem la solució de l'equació següent: $8 - x - 9 = 3$
Fem primer les sumes i restes dels nombres per obtenir una equació més senzilla.
$-x - 1 = 3$
Per aïllar la x sobra el -1, que passa al segon membre sumant.
$-x = 3 + 1$
$-x = 4$
Canviem el signe dels dos membres perquè la x ha de portar davant el signe +.
$x = -4$ és la solució de l'equació.

Per resoldre equacions en les quuals la incògnita hi és una sola vegada:
1r S'aïlla la incògnita. Per aïllar la x els nombres que l'acompanyen sumant passen a l'altre membre restant i els que l'acompanyen restant passen sumant.
2n Es calcula el valor de la incògnita fent les operacions que calgui.

- **Activitat d'aprenentatge 1**

Tipus II: Equacions en les quals un nombre multiplica la incògnita.

Exemple 1

Donada l'equació $3x = 9$, calculem les solucions possibles.
A fi d'aïllar la x dividim els dos membres de l'equació per 3, que és el nombre que multiplica la x. Estem aplicant una propietat de les equacions. Recorda que si multipliquem o dividim pel mateix nombre els dos membres d'una equació, aquesta no varia.

$$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3}$$

Efectuem les operacions a cada terme i queda,
$x = 3$, que és la solució de l'equació.

Exemple 2

Calculem la solució de l'equació següent:

$-2x = 14$

Dividim per 2 els dos membres.

$$\frac{-2x}{2} = \frac{14}{2}$$

Fem les operacions a cada terme,

$-x = 7$

Canviem el signe dels dos membres perquè la x tingui el signe +.

$x = -7$ és la solució de l'equació.

Exemple 3

Calculem la solució de l'equació $12 = -4x$

$$\frac{12}{4} = \frac{-4x}{4}$$

$3 = -x$

$-3 = x$ o bé $x = -3$ és la solució de l'equació.

Per resoldre equacions en les quals un nombre multiplica la incògnita:

1r S'aïlla la incògnita dividint els dos membres pel nombre que multiplica la x.

2n Es calcula el valor de la incògnita fent les operacions que calgui.

- **Activitat d'aprenentatge 2**

Tipus III: Equacions que tenen la incògnita més d'una vegada.

Exemple 1

Calculem la solució de l'equació següent: $x + 2 + 2x = 8$

Sumem els termes que contenen la x, x i + 2x, per obtenir una equació de tipus més senzill.

$3x + 2 = 8$

El 2 passa restant a l'altre membre.

$3x = 8 - 2$

$3x = 6$

Dividim per 3 els dos membres.

$$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$$

$x = 2$ és la solució de l'equació.

Exemple 2

Solucionem la següent equació: $10 - 3x = 6x$

Passem els termes que tenen x al mateix membre. El $-3x$ passa al segon membre amb el signe més (estava restant i passa sumant).

$10 = 6x + 3x$

$10 = 9x$

Dividim per 9 els dos membres.

$$\frac{10}{9} = \frac{9x}{9}$$

Ens queda

$$\frac{10}{9} = x \quad \text{o bé} \quad x = \frac{10}{9} \text{ és la solució de l'equació.}$$

Exemple 3

Calculem la solució de l'equació $x + 2 = 3x + 1$

Agrupem els termes que tenen x en un membre i els que no tenen x a l'altre membre.

El 3x passa restant al primer membre i el 2 passa restant al segon membre.

$x + 2 = 3x + 1$

$x - 3x = +1 - 2$

Efectuem les operacions:

$-2x = -1$

$$\frac{-2x}{2} = \frac{-1}{2}$$

$$-x = \frac{-1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ és la solució de l'equació.}$$

Per resoldre equacions que tenen dos termes amb x o més:

1r Es passen a un membre tots els termes que tenen la incògnita i a l'altre membre tots els que no la tenen.

2n Se sumen els termes de cada membre.

3r Es calcula el valor de la x pels mètodes anteriors.

- **Activitat d'aprenentatge 3**

Tipus IV: Equacions en les quals hi ha parèntesis en un membre o en els dos membres.

Exemple 1

Resolem la següent equació: $2(x +1) = 6$

Primerament hem de treure els parèntesis. En aquest cas apliquem la propietat distributiva, és a dir, multipliquem cada terme del parèntesis per 2.

$2x + 2 = 6$

$2x = 6 - 2$

$2x = 4$

$$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$$

$x = 2$ és la solució de l'equació.

Exemple 2

Calculem la solució de l'equació 3(6 + x) = 2(x−15)
Apliquem la propietat distributiva en els dos membres.
18 + 3x = 2x − 30
3x −2x = −30 −18
x = −48 és la solució de l'equació.

Per resoldre equacions en les quals hi ha parèntesis:
1r Es treuen els parèntesis aplicant-hi la propietat distributiva.
2n Es passen a un membre tots els termes que tenen la incògnita i a l'altre membre tots els que no la tenen.
2n Se sumen els termes de cada membre.
3r Es calcula el valor de la x.

- **Activitat d'aprenentatge 4**

Tipus V: Equacions en les quals hi ha termes que són fraccions.

Exemple 1

Calculem la solució de l'equació $\frac{x}{4} = -2$

Primer de tot hem de treure el denominador multiplicant els dos membres pel mcm dels termes de l'equació.
Aquí el mcm és el 4, multipliquem per 4 els dos membres.

$$\frac{4x}{4} = -2 \cdot 4$$

Operem amb cada terme per separat i ens queda x = −8.
x = −8 és la solució de l'equació.

Exemple 2

Resolem la següent equació: $\frac{x}{2} + 3 = \frac{x}{3} - 5$

El mcm dels denominadors 2 i 3 és 6.

Multipliquem per 6 tots els termes.

$$\frac{6x}{2} + 6 \cdot 3 = \frac{6x}{3} - 6 \cdot 5$$

Operem amb cada terme:
3x + 18 = 2x − 30
3x − 2x = −30 − 18
x = −48 és la solució de l'equació.

Exemple 3

Calculem la solució de l'equació $\frac{x+1}{3} - \frac{x-1}{4} = 2$

El mcm de 3 i de 4 és 12. Multipliquem per 12 tots els termes.

$$\frac{12(x+1)}{3} - \frac{12(x-1)}{4} = 2 \cdot 12$$

Operem amb cada terme per separat:

$4(x + 1) - 3(x - 1) = 24$

$4x + 4 - 3x + 3 = 24$

$4x - 3x = 24 - 3 - 4$

$x = 17$ és la solució de l'equació.

Per resoldre equacions que tenen denominadors en els termes:

1r Es calcula el mcm dels denominadors.

2n Es multipliquen tots i cada un dels termes pel mcm.

3r S'opera amb cada terme per separat.

4t S'apliquen els procediments coneguts.

- **Activitat d'aprenentatge 5**

4. Problemes d'equacions de primer grau amb una incògnita.

Quan volem resoldre un problema matemàtic, podem fer-ho per mètodes diversos. La utilització d'equacions facilita la recerca de la solució del problema i és molt útil si el problema és una mica complicat.

Recordem que el llenguatge habitual pot passar a llenguatge algebraic i, per conseqüent, l'enunciat d'un problema el podem escriure en forma d'equació.

A fi de plantejar bé l'equació, és necessari llegir a poc a poc l'enunciat del problema, reconèixer-hi les dades i escollir la incògnita.

Una vegada plantejada l'equació es resol, és a dir, es calcula la seva solució.

Després se'n fa la comprovació per veure si la solució obtinguda compleix el que diu l'enunciat.

En els exemples següents es resolen problemes mitjançant equacions.

Exemple 1

Si sumem 27 al doble d'un nombre el resultat que obtenim és 47. Quin és el nombre?

Recordem el que sabem sobre els enunciats de les expressions algebraiques.

La incògnita és el nombre que no sabem i l'anomenem x.

El doble del nombre és el doble de x, $2x$.

Sumem 27 a 2x i queda $2x + 27$.

El resultat de la suma és 47.

Escrivim l'equació

$2x + 27 = 47$

Resolem l'equació:

$2x = 47 - 27$

$2x = 20$

$$\frac{2x}{2} = \frac{20}{2}$$

$x = 10$

El nombre és 10

Comprovació: $2 \cdot 10 + 27 = 47$

Exemple 2

Jo tinc el doble d'euros que en Carles i entre els dos tenim 60 euros. Quants diners té cadascú?

La incògnita són els euros que té en Carles, serà x

Jo tinc el doble d'euros que té en Carles $2x$

La suma dels diners de tots dos serà l'equació $2x + x = 60$

Resolem l'equació:

$3x = 60$

$$\frac{3x}{3} = \frac{60}{3}$$

$x = 20$

En Carles té 20 € i jo el doble, 40€.

Comprovació:

La suma és $20 + 40 = 60$

Exemple 3

El pare d'en Pep té el triple d'edat que ell i quan passin 10 anys la suma de les seves edat serà 80 anys. Quina edat té cadascú?

	Edat	D'aquí a 10 anys
Pep	x	$x + 10$
Pare	$3x$	$3x + 10$
Suma		80

$x + 10 + 3x + 10 = 80$

$4x + 20 = 80$

$4x = 60$

$x = 15$

En Pep té 15 anys i el seu pare en té 45.

Comprovació:

L'edat del pare és el triple de la del fill.

$45 = 3 \cdot 15$

D'aquí a 10 anys la suma de les seves edats serà 80.

$15 + 10 + 45 + 10 = 80$

- **Activitats d'aprenentatge 6, 7, 8 ,9, 10, 11 i 12.**