Unitat 1

EL LLENGUATGE ALGEBRAIC

què treballaràs?

En acabar la unitat has de ser capaç de:

- **Escriure en forma d'expressió algebraica enunciats de problemes.**
- **Trobar el valor numèric d'expressions algebraiques.**
- **Reconèixer què és un monomi i els tipus de monomis que hi ha.**
- **Operar amb monomis.**
- **Reconèixer què és un polinomi.**
- **Operar amb polinomis.**

1. El llenguatge algebraic

Vivim en un món en el qual les imatges tenen una gran importància. Pertot arreu podem trobar símbols que donen informació, com els senyals de trànsit, o bé que representen nacions, clubs esportius, empreses, etc. Les marques de productes inunden el mercat i molt sovint un producte el reconeixem pel símbol que utilitza, en lloc del nom de l'empresa que el fabrica.

Les matemàtiques també fan servir uns símbols que són els nombres, però de vegades hi ha situacions en les quals es desconeixen dades i és necessari utilitzar lletres. Les lletres representen les quantitats que ens són desconegudes.

El llenguatge algebraic és una tècnica matemàtica per resoldre problemes. Aquesta tècnica utilitza lletres per expressar nombres que són desconeguts i aplica sobre les lletres les regles de les operacions matemàtiques. Quan es fa l'operació de multiplicar es posa un punt perquè el signe *x* pot confondre's amb una lletra.

Aquesta forma d'expressar i resoldre problemes matemàtics ha estat utilitzada des de l'antiguitat. El matemàtic francès Descartes va fer de l'àlgebra un llenguatge universal, igual en totes les llengües. És igual la llengua en la qual estigui expressat un problema, els símbols algebraics que s'utilitzen per a resoldre'l són els mateixos.

Aquestes expressions que utilitzaven els antics matemàtics són les mateixes que s'utilitzen avui dia i s'anomenen **expressions algebraiques**.

Expressions algebraiques

El llenguatge algebraic el podem utilitzar per a resoldre situacions de la vida quotidiana, es tracta de col·locar una lletra en lloc de la quantitat que no coneixem.

- Imagina que volem recollir diners per fer un viatge de fi de curs i tenim 50 samarretes que ens ha regalat un botiguer. Depenent del preu al qual venguem cada samarreta guanyarem una quantitat o una altra. Si les venem a 10€ cada una recollirem 50x10 = 500€, però si les venem a 15€ seran 50x15 = 750€. La quantitat que no coneixem és el preu de la samarreta, en el seu lloc posem una lletra, per exemple, ***y***.
  L'expressió algebraica que representa els diners que guanyem és **50y**. El valor de ***y*** varia segons el preu.

- Suposem que aconseguim una feina que consisteix a guardar pantalons en caixes. Ens paguen 15€ a la setmana més 2€ per cada caixa que preparem. És clar que el nostre sou dependrà de les caixes que fem i per tant la dada que no sabem és el nombre de caixes. Podem dir que ***x*** és el nombre de caixes, i si per cada una ens paguen 2€ l'expressió és **2x**. En aquest cas tenim 15€ que guanyem fix més els 2x de fer caixes. Això escrit en forma algebraica és **2x + 15**.

  Per a saber quant guanyarem cada setmana utilitzarem l'expressió algebraica **2x + 15**.

  Si fem 50 caixes vol dir que x = 50 i que el sou serà
  $2 \cdot 50 + 15 = 100 + 15 =$ **115€**
  Però si fem 75 caixes la x = 75 i el sou
  $2 \cdot 75 + 15 = 150 + 15 =$ **165€**

- Utilitzant aquest mètode els matemàtics expressen les seves fórmules. Per exemple, l'àrea d'un rectangle s'escriu **b · a**. És a dir, base per altura. Aquesta fórmula és una expressió algebraica i és vàlida per calcular el valor de l'àrea de tots els rectangles, perquè és el producte de qualsevol base i qualsevol altura.
- També hi ha ciències com la física o la química que utilitzen les expressions algebraiques per enunciar els seus principis i facilitar els càlculs. Per exemple, la fórmula **mgh** és una expressió algebraica que indica l'energia potencial d'un cos qualsevol. Segons l'altura (**h**) a la qual estigui situat el cos i segons la seva massa (**m**) l'energia potencial tindrà un valor o un altre.

En les expressions algebraiques les lletres representen nombres i totes les operacions que es realitzen amb elles són operacions amb nombres.

Les expressions algebraiques són un conjunt de nombres i lletres units pels signes de les operacions algebraiques.

El valor de *x*, o de la lletra que utilitzem, no el sabem i varia; per aquesta raó, **les lletres s'anomenen indeterminades o variables**.

Les expressions algebraiques expressen en forma matemàtica l'enunciat d'un problema.

En matemàtiques les lletres que utilitzaràs més sovint són la *x* i la *y*.

Escrivim ara les següents frases en forma d'expressió algebraica:

- Un nombre més cinc.
  El nombre és *x* i hi sumem 5. Queda l'expressió $x + 5$.
  x + 5
- Tinc 2 anys menys que la meva germana.
  La meva germana en té *x*. Jo en tinc 2 menys.
  L'expressió s'escriu $x - 2$.
- Tinc dues vegades els diners que portes a la butxaca menys 10 €.
  A la butxaca portes ***x***.
  Tinc dues vegades el que portes (2*x*) menys 10.
  L'expressió és: 2x −10 2x − 10

  També podem fer l'exercici de forma inversa:
- 2x+3y

  A aquesta expressió hi podria correspondre el següent enunciat: el doble d'un nombre més el triple d'un altre nombre.

- **Activitats d'aprenentatge 1, 2 i 3**

Valor numèric de les expressions algebraiques

Si escrivim l'expressió algebraica que correspon a la factura del gas hem de tenir en compte que cada mes paguem en relació amb el nombre de m^3 de gas que gastem.

Suposem que cada m^3 val 0,033€ i que cada mes gastem *x* m^3. Pagarem 0,033x.

Però a la factura hi apareix un valor fix i suposem que val 10€.

L'expressió algebraica serà 0,033x + 10.

Si un mes gastem $20m^3$, pagarem 0,033·20 + 10 = 10,66€.

Si un altre mes gastem $35m^3$, pagarem 0,033·35 + 10 = 11,155€.

I si fossin $27m^3$, pagaríem 0,033 · 27 + 10 = 10,891€.

20 m^3	10,66€
35 m^3	11,155€
27 m^3	10,891€

L'expressió algebraica té un valor diferent cada vegada segons els metres cúbics de gas que gastem cada mes. Els nombres obtinguts són el valor numèric de l'expressió algebraica.

El **valor numèric** d'una expressió algebraica es calcula substituint les variables o indeterminades (les lletres) per nombres. El resultat obtingut depèn del nombre pel qual substituïm la variable.

En els següents exemples calcularem el valor numèric de les expressions algebraiques en les quals cada una té una dificultat diferent.

Exemple 1

$3x + 6$

Si $x = 2$

Per a calcular el valor numèric on hi ha *x* posem 2.

$3(2) + 6 = 6 + 6 = 12$

Exemple 2

$2a + 3b$

Si $a = 4$ i $b = 5$

$2(4) + 3(5) = 8 + 15 = 23$

Exemple 3

$x^2 - 3x + 2$

Si $x = 6$

$(6)^2 - 3(6) + 2 = 36 - 18 + 2 = 20$

Exemple 4

$2x^2 + 4x - 1$

Si $x = -2$

$2(-2)^2 + 4(-2) - 1 = 2 \cdot 4 - 8 - 1 = 8 - 8 - 1 = -1$

- **Activitat d'aprenentatge 4**

2. Monomis

L'àrea d'un quadrat és igual al costat elevat al quadrat (x^2). Quina superfície tenen 3 rajoles quadrades?

L'expressió algebraica és $3x^2$.

L'expressió $3x^2$ és un monomi.

Un **monomi** és una expressió algebraica d'un sol terme.

En el monomi $3x^2$ podem distingir dues parts:

Monomi
- **Part numèrica**: coeficient 3
- **Part literal**
  - Variable o indeterminada: x
  - Grau (és l'exponent): 2

La part numèrica és el coeficient que correspon al nombre que hi ha davant de les lletres.

La part literal està formada per:
- **la variable o indeterminada**, que és la lletra o lletres.
- **el grau**, que és l'exponent al qual està elevada la variable.

Quan el grau del monomi és 1 es diu que és de primer grau. En aquest cas no es posa el nombre de l'exponent.

Si no hi ha part literal (no apareix cap lletra) el monomi és de grau zero.

Exemples de monomis:

Monomi	Part numèrica coeficient	Part literal		Nom
		Variable	Grau	
$3x^5$	3	x	5	**Monomi de cinquè grau** **Monomi de grau 5**
$4y^2$	4	y	2	**Monomi de segon grau** **Monomi de grau 2**
x^3	1	x	3	**Monomi de tercer grau** **Monomi de grau 3**
2x	2	x	1	**Monomi de primer grau** **Monomi de grau 1**
7	7			**Monomi de grau zero**

Tipus de monomis

Monomis semblants: tenen la mateixa part literal i diferents els coeficients.

El monomi $6x^4$ i el $2x^4$ són monomis semblants.

Monomi	Coeficient	Part literal
$6\,x^4$	6	x^4
$2\,x^4$	2	x^4

El monomi $3x^2$ i el $5x^7$ no són monomis semblants.

Monomi	Coeficient	Part literal
$3x^2$	3	x^2
$5x^7$	5	x^7

Exemples:

El monomi $8x^3$ és semblant al monomi $\frac{3}{4}x^3$

El monomi $8x^2$ no és semblant al monomi $\frac{3}{4}x^3$

El monomi $2y^3x^5$ és semblant al monomi $15y^3x^5$

Monomis oposats: són els que tenen la mateixa part literal, però el coeficient d'un és oposat al de l'altre.

Exemple:

$7x^5$ i $-7x^5$ són monomis oposats.

Monomi	Coeficient	Part literal
$7x^5$	7	X^5
$-7x^5$	-7	x^5

- **Activitat d'aprenentatge 5**

3. Operacions amb monomis

Per fer les operacions amb monomis aplicarem les regles de les operacions amb nombres enters.

Suma de monomis

Per sumar monomis han de ser monomis semblants.

Sumem els monomis $5x^4 + 7x^4$. Són semblants perquè tenen la mateixa part literal x^4.

Sumem els coeficients $(5 + 7)$ i el resultat és $12x^4$. És un altre monomi semblant.

Exemple 1

$3x^3 + 5x^3 = 8x^3$

Exemple 2

$$\frac{4}{3}a^2 + \frac{1}{5}a^2 = \frac{20}{15}a^2 + \frac{3}{15}a^2 = \frac{23}{15}a^2$$

Si els monomis no són semblants, $2x^3 + 3x^2$, es deixa sense fer cap operació.

- **Activitat d'aprenentatge 6**

Resta de monomis

Per restar monomis han de ser monomis semblants.

Restem els monomis $10x^2 - 6x^2$. Són semblants perquè tenen la mateixa part literal x^2.

Restem els coeficients (10 - 6) i el resultat és **$4x^2$**. És un altre monomi semblant.

Exemple 1

$3x - 4x = -x$

- **Activitats d'aprenentatge 7 i 8**

4. Polinomis

Un **polinomi** està format per sumes i restes de monomis.

El polinomi $P(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x + 7$ té quatre **monomis o termes**. Té una sola variable o indeterminada ***x***.

Grau d'un polinomi: és el del monomi de grau més gran.

Polinomi	Grau	Variable	Termes en *x*	Terme independent
$4x^3 - 5x^2 + 2x + 7$	3	x	$4x^3$	7
			$-5x^2$	
			$+2x$	

5. Operacions amb polinomis

Suma de polinomis

Tenim dos polinomis:

$A(x) = 6x^2 - 2x + 3$

$B(x) = 2x^2 - 4x - 5$

Per fer la suma A(x) + B(x) escrivim els polinomis un a sota de l'altre, de manera que cada columna tingui els monomis del mateix grau.

$$\begin{array}{lll} & A(x) \longrightarrow & 6x^2 - 2x + 3 \\ & B(x) \longrightarrow & 2x^2 - 4x - 5 \\ \hline \text{Fem la suma} & A(x) + B(x) \longrightarrow & 8x^2 - 6x - 2 \end{array}$$

També podem fer la suma dels polinomis A(x) + B(x) agrupant els monomis semblants i després fent les operacions.

$$A(x) + B(x) = (6x^2 - 2x + 3) + (2x^2 - 4x - 5) = 6x^2 - 2x + 3 + 2x^2 - 4x - 5 = 8x^2 - 6x - 2$$

$$8x^2 \quad -6x \quad -2$$

En aquest exemple el que hem fet és reduir els termes semblants.

- **Activitat d'aprenentatge 9**

Resta de polinomis

Per a restar polinomis se suma al primer polinomi l'oposat del segon.

Tenim els polinomis

$A(x) = 3x^2 - 6x + 3$
$B(x) = -7x^2 + 4x - 8$

Escrivim els polinomis un a sota de l'altre de manera que cada columna correspon a monomis del mateix grau.

Després canviem el signe de cada un dels termes del polinomi B(x) per fer el polinomi oposat.

$A(x)$	$\rightarrow$	$3x^2 - 6x + 3$
$-B(x)$	$\rightarrow$	$7x^2 - 4x + 8$
$A(x) - B(x)$	$\rightarrow$	$10x^2 - 10x + 11$

També podem fer la resta A(x) – B(x) escrivint el primer polinomi A(x) i després el segon B(x) canviant de signe tots els seus monomis. Després agrupem monomis semblants i fem les operacions.

$$A(x)-B(x) = (3x^2 - 6x + 3) - (-7x^2 + 4x - 8) = 3x^2 - 6x + 3 + 7x^2 - 4x + 8 = 10x^2 - 10x + 11$$

$10x^2 \quad -10x \quad +11$

- **Activitat d'aprenentatge 10**