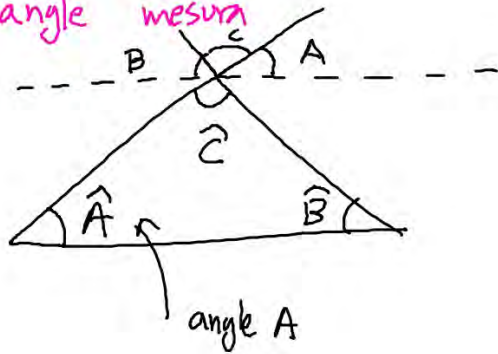


TRIGONOMETRIA

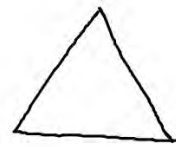
3 angle mesura



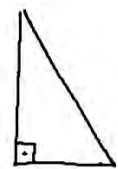
$$A + B + C = 180^\circ$$



ISÒSCELES

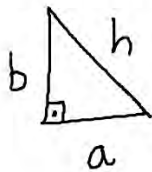


EQUILÀTER



TRIANGLE
RECTANGLE

↓ TMA. PITÀGORES

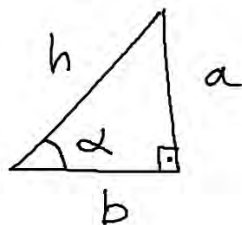


$$h^2 = a^2 + b^2$$
$$h = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$x^2 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5}$$

Anem a definir uns
conceptes noves
amb un triangle rectangle

Vaig a definir les R.T.'s (Ratios Trigonométriques)
d'un triangle rectangle:



RATIOS TRIGONOMÉTRIQUES d' α

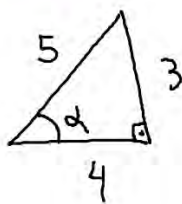
$$\sin \alpha = \text{sinus } \alpha = \frac{a}{h}$$

$$\cos \alpha = \text{cosinus } \alpha = \frac{b}{h}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a/h}{b/h} = \dots = \frac{a}{b}$$

EXEMPLES

(a)



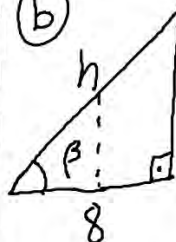
R.T.'s d' α

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{3}{4} = 0,75$$

(b)



R.T.'s de β

$$h^2 = 6^2 + 8^2 = 100$$

$$h = \sqrt{100} = 10$$

$$\sin \beta = \frac{6}{10} = 0,6$$

$$\cos \beta = \frac{8}{10} = 0,8$$

$$\text{tg } \beta = \frac{6}{8} = 0,75$$

CONCLUSÓ

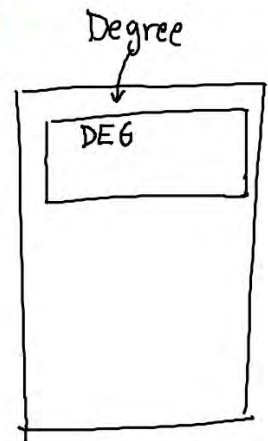
Les R.T.'s d' α no depenen
del triangle, sinó que depenen
només de l'angle α

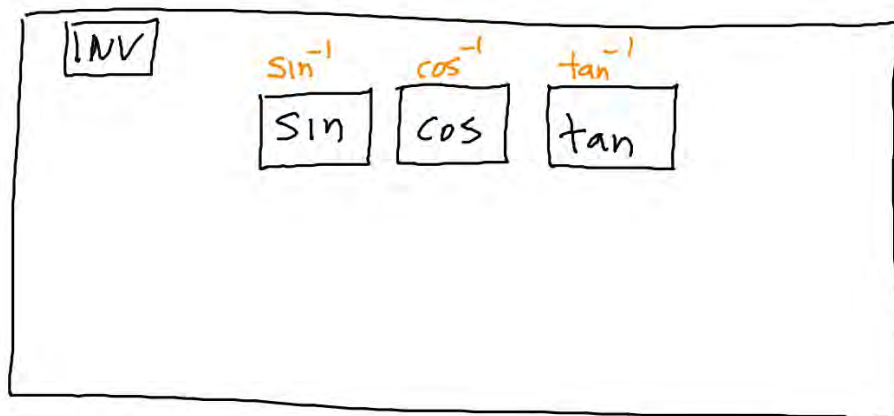
La informació
està en α



AMB CALCULADORA

$$\begin{array}{l} \sin 30^\circ = \\ \boxed{30} \quad \boxed{\sin} = 0,5 \quad \left(\begin{array}{l} \text{CASIO} \\ \text{ANTIGUES} \end{array} \right) \\ \boxed{\sin} \quad \boxed{30} = 0,5 \quad \left(\begin{array}{l} \text{CASIO} \\ \text{MODERNA} \end{array} \right) \end{array}$$





$$5 \cdot \frac{1}{5} = 1 \quad \frac{1}{5} = 5^{-1} \leftarrow \text{Invers de } 5$$

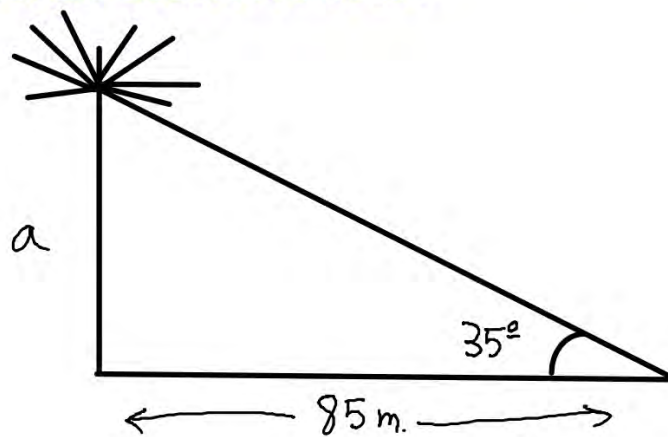
$f = \text{função} \quad f^{-1} = \text{função inversa}$

$$\sin \alpha = 0,4 \Rightarrow \alpha = \arcsin 0,4 = ?$$

$(\quad)^2 = 16$
 $\sin \beta = 0,2 \quad \beta = 11,54^\circ$
 $\tan \gamma = 0,8 \quad \gamma = 38,65^\circ$

$\boxed{0,4} \boxed{INV} \boxed{\sin} \boxed{=}$ $23,57^\circ$ (ANTIGA)
 $\boxed{INV} \boxed{\sin} \boxed{0,4} \boxed{=}$ $23,57^\circ$ (NOVA)

Per determinar l'altura d'una antena, ens hem allunyat 85m. de la base i hem mesurat un angle de 35° format per la visual al punt més alt i l'horitzontal. Quant fa l'antena?



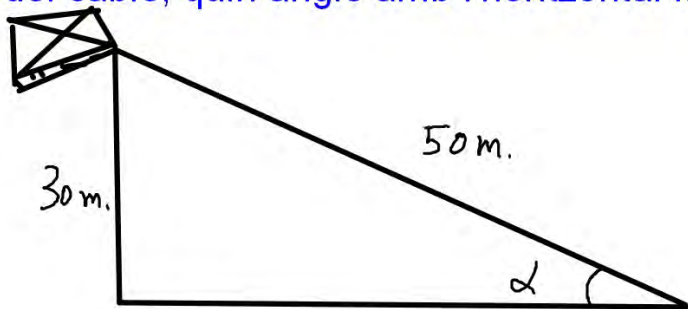
$$\tan 35^\circ = \frac{a}{85}$$

$$0,70$$

$$0,70 = \frac{a}{85}$$

$$59,5 \text{ m.} = 0,70 \cdot 85 = a$$

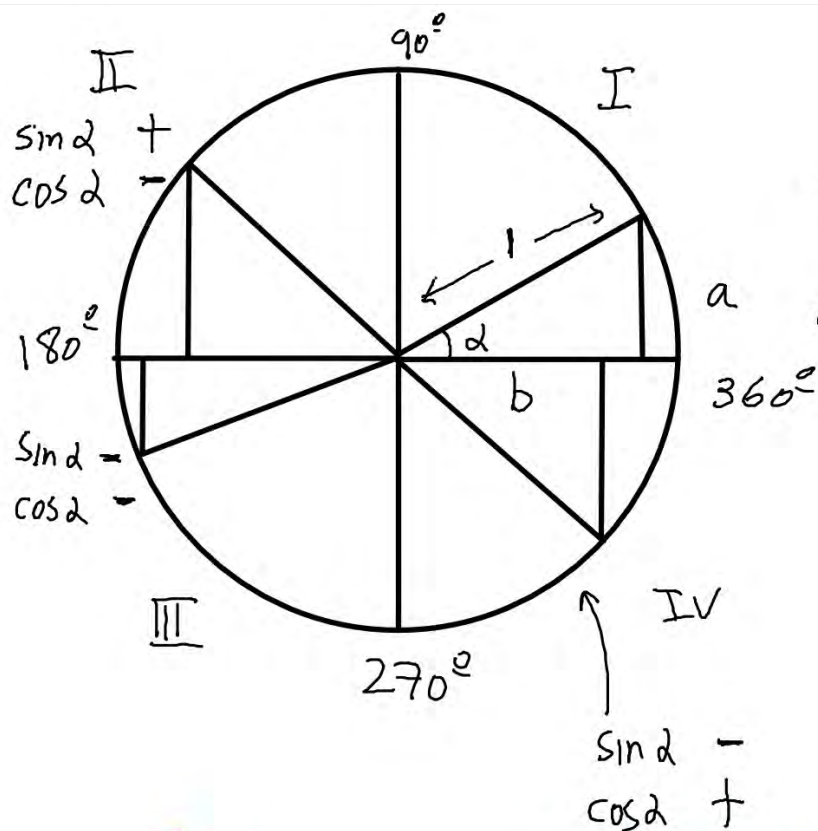
Una milotja (estel) de 50m.de cable vola a 30m.d'alçada en la màxima extensió del cable, quin angle amb l'horitzontal fa l'estel?



$$\sin \alpha = \frac{30}{50} = 0,6$$

$$\alpha = \underbrace{\arcsin}_{\text{arc el sinus del qual}} 0,6 = 36,86^\circ$$

arc el sinus del qual = arc sinus



$$\sin \alpha = \frac{a}{1} = a$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{1} = b$$

1r. QUADRANT

$$\sin \alpha = +$$

$$\cos \alpha = +$$

Exercici Demuestra

que α angle

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Ajut // Aplica la definició i el Tm. de Pitàgores

Deduïm que $-1 \leq \sin \alpha, \cos \alpha \leq 1$
 $[-1, 1]$

EXERCICI

Si α està en el 1r. quadrant i $\sin \alpha = 0,5$
Càlcula $\cos \alpha$ i $\tan \alpha$.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$0,5^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - 0,25$$

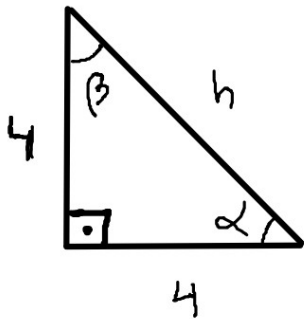
$$\cos^2 \alpha = 0,75$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{0,75} = 0,86$$

$\uparrow$ pq està al 1r. quadrant

RESOLUCIÓ de TRIANGLE

Resoldre un triangle vol dir calcular tots els seus elements, és a dir, els costats i els angles.

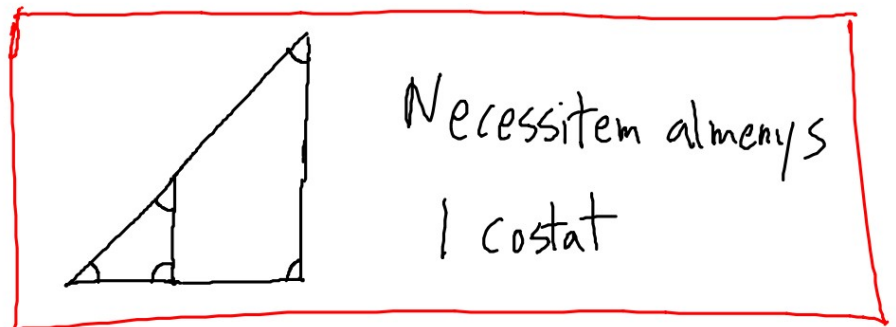


$$\tan \alpha = \frac{4}{4} = 1$$

$$\alpha = \arctan 1 = 45^\circ \Rightarrow \beta = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

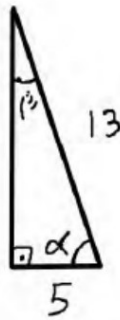
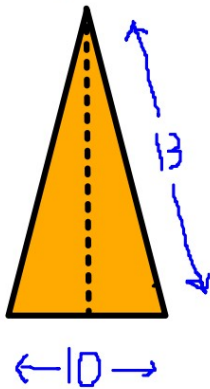
Si calculem h per Tma. Pitàgores : $h^2 = 4^2 + 4^2 \Rightarrow h^2 = 32$
 $h = \sqrt{32} = 5,65$

En un triangle, sempre hi ha
6 elements = 3 costats + 3 angles



Necessitem almenys
1 costat

Resol el triangle:

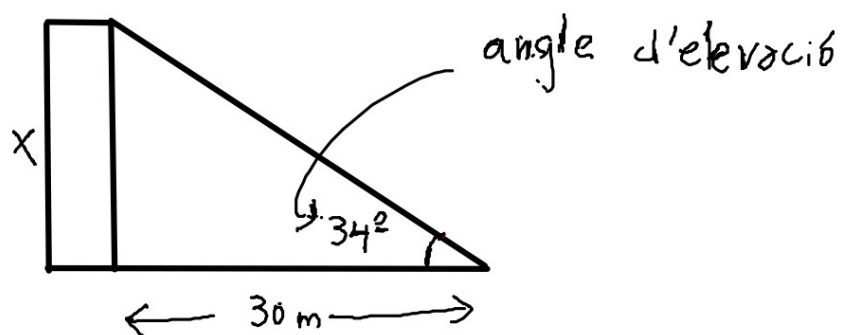


$$\cos \alpha = \frac{5}{13} = 0,3846154$$

$$\alpha = \arccos 0,3846154 = 67,38^\circ$$

$$\beta = 90 - 67,38^\circ = 22,62^\circ$$

Calcula l'altura d'un edifici sabent que l'angle que forma el punt més alt amb l'horitzontal és de 34° , i que la distància de l'observador a la base de l'edifici és de 30m.



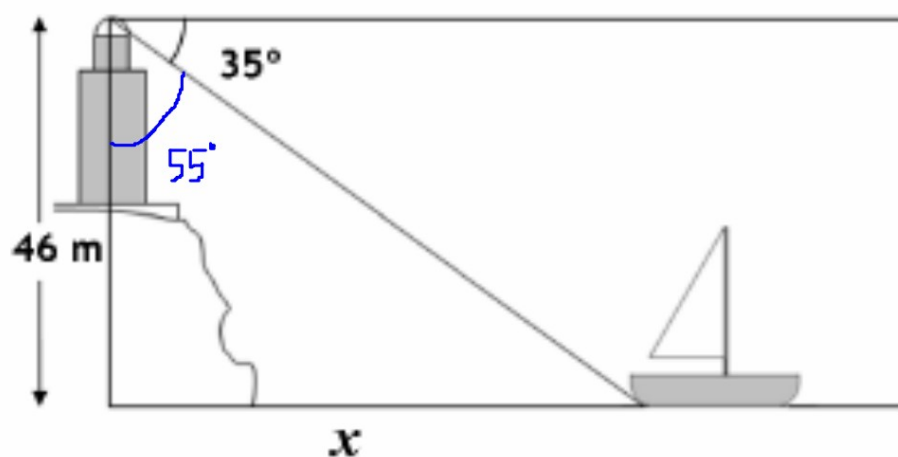
$$\tan 34^\circ = \frac{x}{30}$$

0,674508516

$$x = 20,23 \text{ m.}$$



Des d'un far, que es troba a 46 m sobre el nivell del mar, es veu un vaixell sota un angle de 35° (angle que forma la visual amb l'horitzontal, també conegut com a angle de depressió). A quina distància de la vertical del far (x) es troba el vaixell?

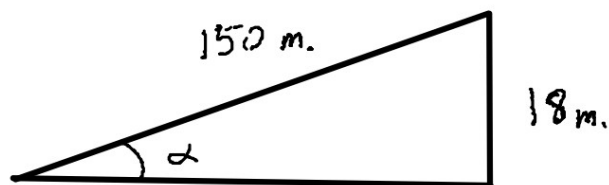


$$\tan 55^\circ = \frac{x}{46}$$

$$1,428148003 \cdot 46 = x$$

$$65,69 \text{ m} = x$$

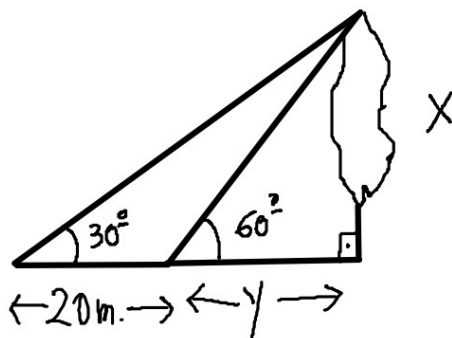
Quan es recorren 150m. sobre una carretera, l'altitud sobre el nivell del mar augmenta 18m. Quina és la inclinació de la carretera?



$$\sin \alpha = \frac{18}{150} = 0,12$$

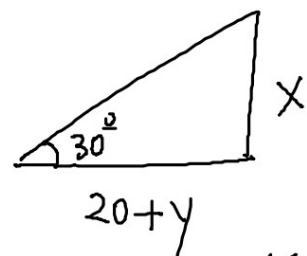
$$\alpha = \arcsin 0,12 = 6,89^\circ$$

Des d'un punt, s'observa la cúspide d'un arbre amb una inclinació de 60° . Si es retrocedeixen 20m. en línia recta, la inclinació és de 30° . Calcula l'altura de l'arbre.



$$1,732 = \tan 60^\circ = \frac{X}{y}$$

$$1,732y = X$$



$$\tan 30^\circ = \frac{X}{20+y}$$

$$0,577 \Rightarrow 0,577 \cdot (20+y) = X$$

$$1,732 y = 0,577 \cdot (20 + y)$$

$$1,732 y = 0,577 \cdot 20 + 0,577 y$$

$$1,732 y - 0,577 y = 11,54$$

$$1,155 y = 11,54 \Rightarrow$$

$$y = \frac{11,54}{1,155} \approx 10 \text{ m.}$$

$$X = 1,732 \cdot y = 1,732 \cdot 10 = 17,32 \text{ m.}$$

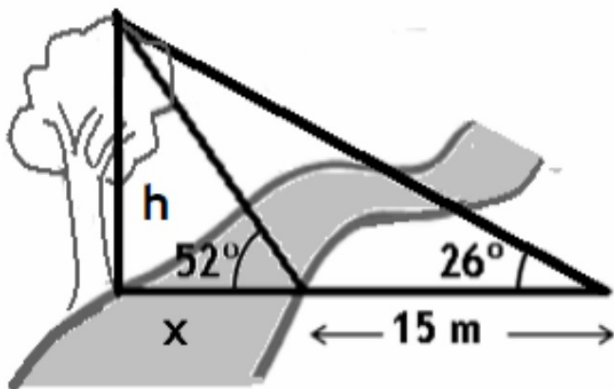
$$0,99$$

$$25^{\circ} 6' 32''$$

$$25 \begin{matrix} 0,99 \\ \end{matrix} 6 \begin{matrix} 0,99 \\ \end{matrix} 32 \begin{matrix} 0,99 \\ \end{matrix} =$$

$$\begin{matrix} 0,99 \\ \end{matrix} 25,108889$$

Per conèixer l'amplària d'un riu (x) i l'alçada d'un arbre (h) que es troba a la riba oposada procedim de la manera següent: ens situem enfront de l'arbre i mesurem l'angle d'elevació de la seva part més alta (52°). Ens allunyem 15 m en direcció perpendicular a la vora del riu i tornem a mesurar l'angle d'elevació (26°). Quant mesuren l'amplària del riu i l'alçada de l'arbre?

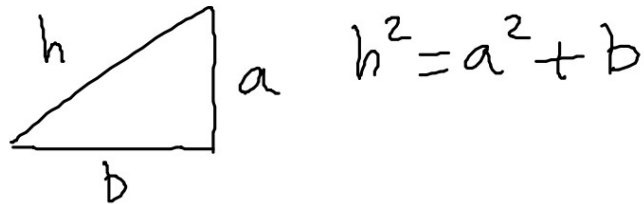


$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 52^\circ &= \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 26^\circ &= \frac{h}{x+15} \end{aligned} \right\}$$

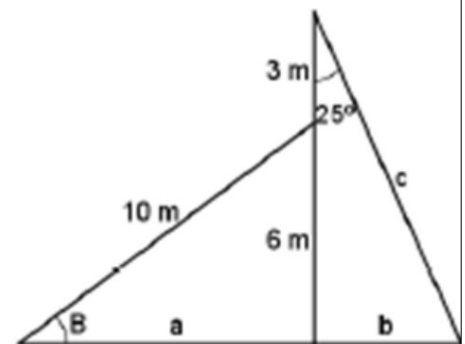
Amplària riu = 9,23 m

Altura arbre = 11,82 m

Exercici 9.

a) el costat a

$$a = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8 \text{ m}$$

b) l'angle B

$$\sin B = \frac{6}{10} = 0,6 ; B = \arcsin 0,6 = 36,87^\circ = 36^\circ 52' 12''$$

c) el costat b

$$\sin 25^\circ = \frac{b}{9} ; b = 9 \cdot \sin 25^\circ = 9 \cdot 0,4226 = 3,80 \text{ m} = 4,19$$

~~$\sin 25^\circ = \frac{b}{9}$~~ ; ~~$b = 9 \cdot \sin 25^\circ$~~ = ~~$9 \cdot 0,4226$~~ = ~~$3,80$~~ m = ~~$4,19$~~

~~$\text{tg } 25^\circ$~~ ~~$0,466307658$~~

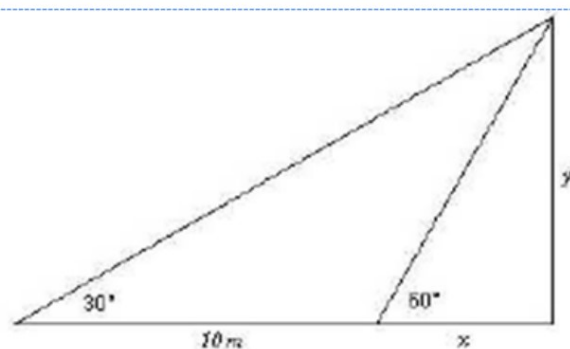
d) el costat c

$$c = \sqrt{3,80^2 + 9^2} = \sqrt{14,47 + 81} = \sqrt{95,47} = 9,77 \text{ m} = 9,9$$

~~$c = \sqrt{3,80^2 + 9^2}$~~ = ~~$\sqrt{14,47 + 81}$~~ = ~~$\sqrt{95,47}$~~ = ~~$9,77$~~ m = ~~$9,9$~~

~~$4,19^2$~~ ~~$17,6$~~ ~~$98,6$~~

Exercici 7.

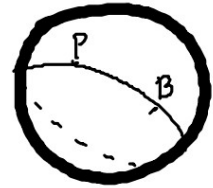


$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 30^\circ &= \frac{y}{10+x} \\ \operatorname{tg} 60^\circ &= \frac{y}{x} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} y &= x \operatorname{tg} 60^\circ \\ y &= (10+x) \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \end{aligned} \rightarrow x \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = (10+x) \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$$

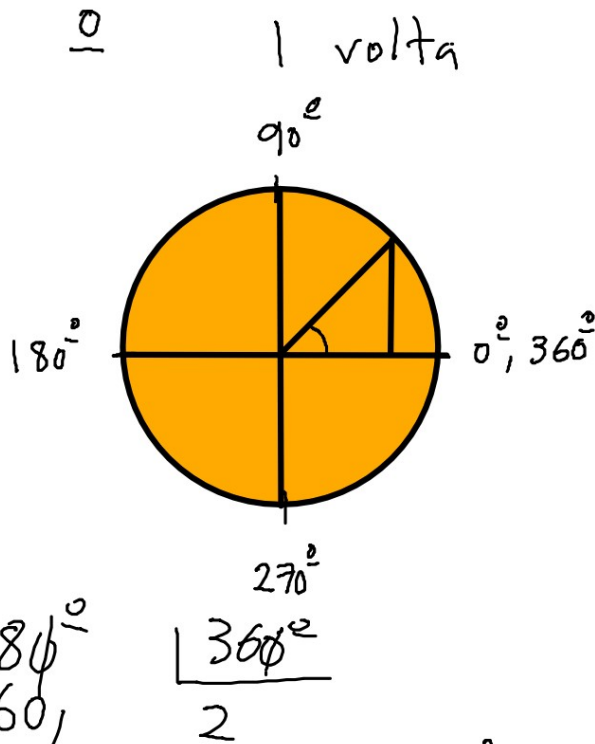
$$x \operatorname{tg} 60^\circ = 10 \operatorname{tg} 30^\circ + x \operatorname{tg} 30^\circ ; x \operatorname{tg} 60^\circ - x \operatorname{tg} 30^\circ = 10 \operatorname{tg} 30^\circ ; x (\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ) = 10 \operatorname{tg} 30^\circ$$

$$x = \frac{10 \operatorname{tg} 30^\circ}{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ} = 5 \text{ m} ; y = x \operatorname{tg} 60^\circ = 5 \cdot \sqrt{3} = \boxed{5\sqrt{3} \text{ m}} \cong \boxed{8,66 \text{ m}}$$

MESURA dels ANGLES



a)



R.T.'s de 45°

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

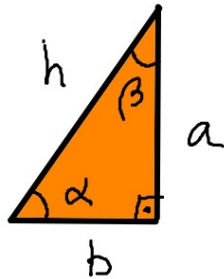
$$\left. \begin{array}{l} \text{R.T.'s de } 405^\circ \\ \text{R.T.'s de } -315^\circ \end{array} \right\} = \text{R.T.'s de } 45^\circ$$

R.T.'s de $390^\circ = \text{R.T.'s de } 30^\circ$

R.T.'s de $-30^\circ = \text{R.T.'s de } 330^\circ$

$$780^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 60^\circ \Rightarrow \text{R.T.'s de } 780^\circ = \text{R.T.'s de } 60^\circ$$

⑥



R.T.'s de α

$$\sin \alpha = \frac{a}{h}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{h}$$

R.T.'s de β

$$\sin \beta = \frac{b}{h}$$

$$\cos \beta = \frac{a}{h}$$

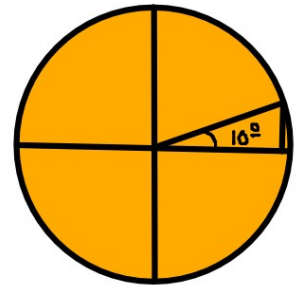
EXEMPLE

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\beta = 60^\circ$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$



EXERCICI

Si $\sin 10^\circ = 0.1736$

Calcula $\sin 80^\circ, \cos 80^\circ$

$$\cos^2 10^\circ = 1 - 0.030 \Rightarrow \cos^2 10^\circ = 0.97$$

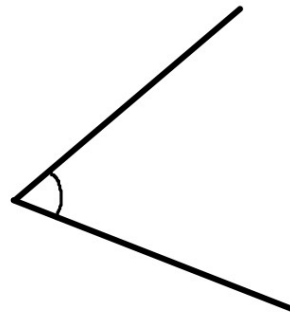
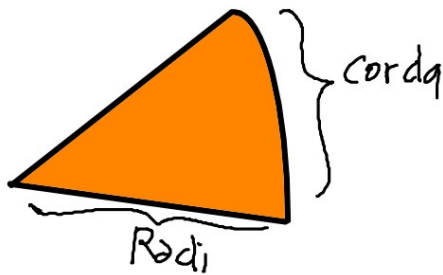
$$\boxed{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1}$$

$$0.1736^2 + \cos^2 10^\circ = 1 \Rightarrow \cos 10^\circ = \sqrt{0.97} = 0.9848$$

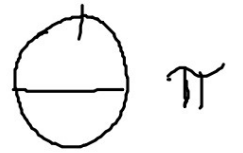
$$0.030$$

$$\sin 80^\circ = 0.9848 \quad \cos 80^\circ = 0.1736$$

©



Degré | D
Degree



1 RADIANT = És l'angle

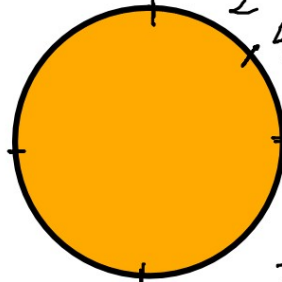
f.g. la seva corda és igual que el radi

FÓRMULES

$$\frac{\pi}{180^\circ} \cdot ()^\circ$$

$$\frac{180^\circ}{\pi} \cdot () \text{ radians}$$

$$180^\circ = \pi \text{ rad}$$



$$90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$360^\circ = 2\pi \text{ radians}$$

$$270^\circ = \frac{3\pi}{2} \text{ rad.}$$

Passa de $^{\circ}$ a rad o viceversa:

$$\frac{\pi}{2} : 3 = \frac{\pi}{6} \quad 30^{\circ} \quad \frac{\pi}{10} = 18^{\circ} \quad 60^{\circ} \quad 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{180} \cdot 360^{\circ} = \frac{3\pi}{18} = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{8}$$

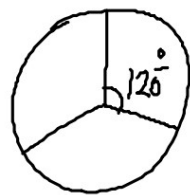
$$120^{\circ}$$

$$\frac{\pi}{12} = \frac{180^{\circ}}{12} = 15^{\circ}$$

$$\frac{180^{\circ}}{8} = 22,5^{\circ}$$

$$\frac{2\pi}{3}$$

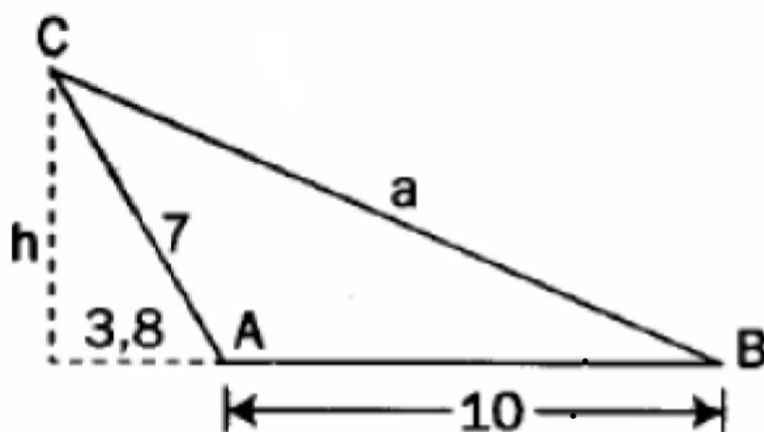
$$\frac{\pi}{180} \cdot 120^{\circ} = \frac{2\pi}{3}$$



6.

Amb les dades de la figura adjunta, calculeu:

- a) L'altura h
- b) L'angle $\hat{B}$
- c) L'angle $\hat{A}$
- d) El costat a



7.

Des d'una certa distància, l'angle amb l'horitzontal de la visual cap alt d'un edifici és de 60° . Si ens n'allunyem 10 metres, l'angle anterior és de 30° . Trobeu l'alçada de l'edifici.

Exercici 6.

a) L'altura h $h^2 + 3,8^2 = 7^2$

$$h = \sqrt{7^2 - 3,8^2} = \sqrt{49 - 14,44} = \sqrt{34,56} = \boxed{5,88}$$

b) L'angle $\hat{B}$

$$\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{5,88}{13,8} ; \operatorname{tg} \hat{B} = 0,42599... ;$$

$$\hat{B} = \arctg 0,42599... = \boxed{23,07^\circ}$$

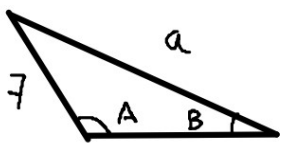
c) L'angle $\hat{A}$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5,88}{3,8} ; \operatorname{tg} \alpha = 1,547... ; \alpha = \arctg 1,547... = 57,12^\circ ;$$

$$\hat{A} = 180^\circ - 57,12^\circ = \boxed{122,88^\circ}$$

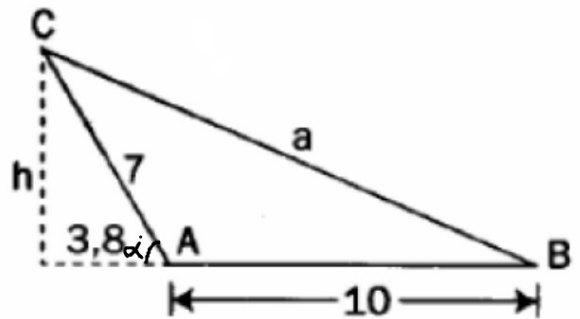
d) El costat a

$$\frac{a}{\sin 122,88} = \frac{7}{\sin 23,07} ; a = \frac{7 \cdot \sin 122,88}{\sin 23,07} = \boxed{15}$$



$$5,88^2 + 13,8^2 = a^2$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



height

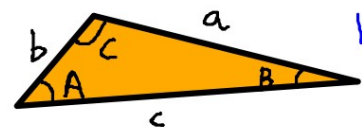
Val per qualsevol

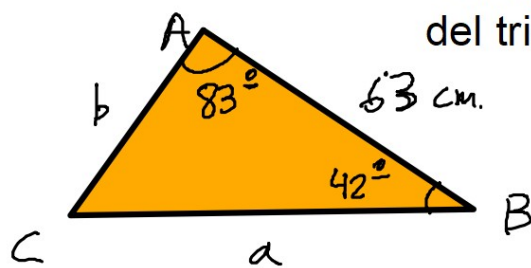
El tria

no té p

Ser rec

TMA.SINUS





Calcula quan val l'angle C i els costats a i b del triangle.

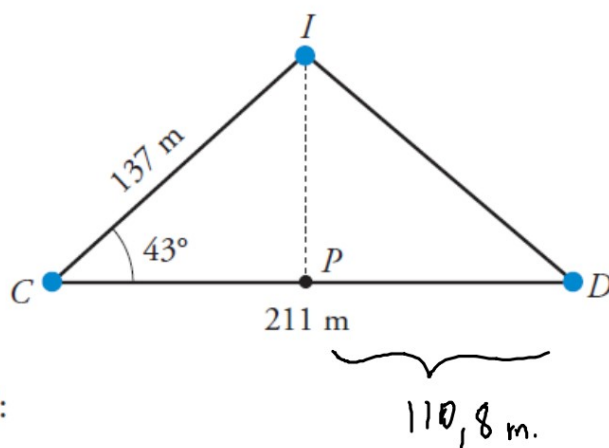
Com que no és un triangle rectangle, hem d'aplicar el Tma. del Sinus

$$C = 180^\circ - (83^\circ + 42^\circ) = 55^\circ$$

$$\frac{a}{\sin 83^\circ} = \frac{63}{\sin 55^\circ} \Rightarrow a = \frac{63}{\sin 55^\circ} \cdot \sin 83^\circ = 76,34 \text{ cm.}$$

$$\frac{b}{\sin 42^\circ} = \frac{63}{\sin 55^\circ} \Rightarrow b = \frac{63}{\sin 55^\circ} \cdot \sin 42^\circ = 51,46 \text{ cm}$$

- 37** ■■■ Conocemos la distancia de nuestra casa a la iglesia, 137 m; la distancia de nuestra casa al depósito de agua, 211 m, y el ángulo, 43° , bajo el cual se ve desde nuestra casa el segmento cuyos extremos son la iglesia y el depósito.
¿Cuál es la distancia que hay de la iglesia al depósito de agua?



En el triángulo IPC :

$$\cos 43^\circ = \frac{\overline{CP}}{137} \rightarrow \overline{CP} \approx 100,2 \text{ m}$$

$$\operatorname{sen} 43^\circ = \frac{\overline{IP}}{137} \rightarrow \overline{IP} \approx 93,43 \text{ m}$$

$$\overline{PD} = 211 - 100,2 = 110,8 \text{ m}$$

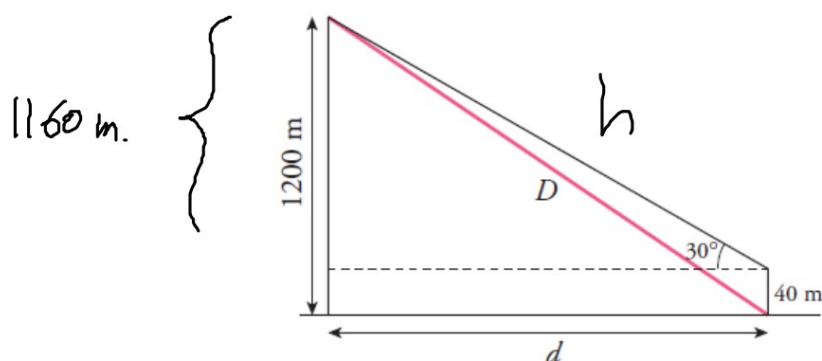
Distancia de la iglesia al depósito:

$$\overline{ID} = \sqrt{\overline{PD}^2 + \overline{IP}^2} = \sqrt{110,8^2 + 93,43^2} \approx 144,93 \text{ m}$$

PÁGINA 164

38 Desde la torre de control de un aeropuerto se establece comunicación con un avión que va a aterrizar. En ese momento, el avión se encuentra a una altura de 1 200 metros y el ángulo de observación desde la torre (ángulo que forma la visual hacia el avión con la horizontal) es de 30° .

¿A qué distancia está el avión del pie de la torre si esta mide 40 m de altura?



$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1\,200 - 40}{d} \rightarrow d = \frac{1\,160}{\operatorname{tg} 30^\circ} = 2\,009,2 \text{ m}$$

Utilizando el teorema de Pitágoras:

$$D = \sqrt{(1\,200)^2 + (2\,009,2)^2} = 2\,340,3 \text{ m}$$

La distancia del avión al pie de la torre es de 2 340,3 m.

ALTRA FORMA

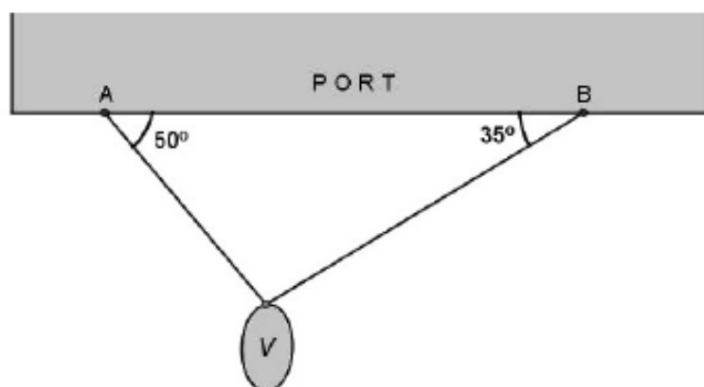
$$\sin 30^\circ = \frac{1\,160}{h}$$

$$h = \frac{1\,160}{\frac{1}{2}} = 2\,320 \text{ m}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{d}{2\,320} \Rightarrow \cos 30^\circ \cdot 2\,320$$

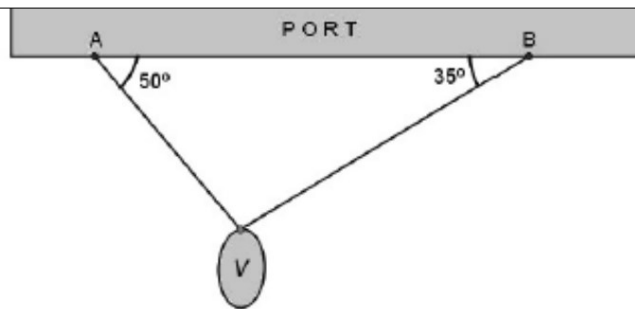
i apliquen PITÁGORAS 2 009,17

El vaixell V està amarrat al port amb dues cordes subjectades en els punts A i B , separats 20 metres l'un de l'altre. Les dues cordes estan tensades i formen un angle de 50° i un altre de 35° , respectivament, amb la paret del port.



a) Calculeu l'angle que formen les dues cordes entre si.
[0,5 punts]

b) Calculeu la suma de la longitud de les dues cordes.
[1,5 punts]



- a)* Calculeu l'angle que formen les dues cordes entre si.
[0,5 punts]

$$\alpha = 180^\circ - 50^\circ - 35^\circ = 95^\circ$$

L'angle fa 95° .

- b)* Calculeu la suma de la longitud de les dues cordes.
[1,5 punts]

$$\frac{a}{\sin 50^\circ} = \frac{20}{\sin 95^\circ} \quad ; \quad a = \frac{20 \cdot \sin 50^\circ}{\sin 95^\circ} = 15,38 \text{ m}$$

$$\frac{b}{\sin 35^\circ} = \frac{20}{\sin 95^\circ} \quad ; \quad b = \frac{20 \cdot \sin 35^\circ}{\sin 95^\circ} = 11,52 \text{ m}$$

$$15,38 + 11,52 = 26,89 \text{ m}$$

Les dues cordes fan 26,89 metres en total.

Compteu 0,5 punts per l'apartat *a* i 1,5 punts per l'apartat *b*.