

Equacions Exponencials i Logarítmiques

Són equacions on apareixen potències o logaritmes.

$$\textcircled{a} \quad 2^x = 8 \quad \Rightarrow \quad 2^x = 2^3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=3}$$

$$\textcircled{b} \quad 2^x = 5 \quad \Rightarrow \quad x = \log_2 5 \quad \begin{array}{l} \text{apliquem la} \\ \text{definició de} \\ \text{logaritme} \end{array}$$

$$\textcircled{c} \quad \sqrt[x]{16} = 2^x \quad \Rightarrow \quad \sqrt[x]{4} = 2^x \quad \Rightarrow \quad 2^{\frac{4}{x}} = 2^x$$
$$\Rightarrow \quad \frac{4}{x} = x \quad \Rightarrow \quad 4 = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{4} = \pm 2$$

només
agafem
la positiva,
ja que el radical d'una arrel
ha de ser positiu

$$\textcircled{d} \quad 10^x = 14 \Rightarrow x = \log 14$$

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

$$\textcircled{e} \quad 2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 28$$

$$2 \cdot \textcircled{2^x} + \textcircled{2^x} + 2^{-1} \textcircled{2^x} = 28$$

$$2^x \cdot \left(\underbrace{2 + 1 + 2^{-1}}_{3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}} \right) = 28$$

$$\Rightarrow 2^x \cdot \frac{7}{2} = 28$$

$$\Rightarrow 2^x = \frac{28 \cdot 2}{7} \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow \boxed{x=3}$$

8

$$\log x + \log x^2 = 3$$

$$\begin{aligned}\log x \cdot y &= \log x + \log y \\ \log \frac{x}{y} &= \log x - \log y \\ \log x^m &= m \cdot \log x\end{aligned}$$

He d'aplicar les propietats dels logaritmes

$$\log x \cdot x^2 = 3 \Rightarrow \log x^3 = 3$$

$$3 \cdot \log x = 3$$

$$\log x = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow 10^1 = x$$

$$\boxed{10 = x}$$

9

$$\log x + \log 50 = 3$$

$$\log x \cdot 50 = 3 \Rightarrow 10^3 = 50x$$

$$1000 = 50 \cdot x \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{r} 1000 \\ \hline 50 \\ \hline 20 \end{array}} = x$$

APLICACIÓ : Interés simple i interés compost

INTERÉS SIMPLE

$$I = C_0 \cdot i \cdot t$$

C_0 = Capital Inicial

t = temps

i = tant per u

INTERÉS COMPOST

$$C_t = C_0 \cdot (1+i)^t$$

Capital després de t anys

EXEMPLE (a) Calcula el capital final quan col·loquem 200.000 € a interès simple durant 3 anys al 9% anual.

$$I = 200.000 \cdot 0,09 \cdot 3 = 54.000 \text{ €} \Rightarrow \text{Capital} = 200.000 + I =$$

$$\text{final} = 254.000 \text{ €}$$

(b) $C_3 = 200.000 \cdot (1+0,09)^3 = 200.000 \cdot 1,09^3 = 259.005,8 \text{ €}$

(c) Calcula el capital inicial que s'ha d'invertir a interès compost al 6% anual per obtenir 6000 € al cap de 5 anys.

$$C_t = C_0 \cdot (1+i)^t \quad 6000 = C_0 \cdot (1+0.06)^5$$

$$6000 = C_0 \cdot 1,06^5 \Rightarrow 6000 = C_0 \cdot 1,338$$

$$4483,55 \text{ €} = \frac{6000}{1,338} = C_0$$

(d) $4^x + 2^{x+1} = 80 \Rightarrow (2^2)^x + 2 \cdot 2^x = 80$
 $(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x = 80$ $z = 2^x$ $z^2 + 2z = 80$
 $z^2 + 2z - 80 = 0$

$$z^2 + 2z - 80 = 0 \Rightarrow z = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-80)}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{324}}{2} = \frac{-2 \pm 18}{2} \begin{cases} 8 \\ -10 \end{cases}$$

$$2^x = z = 8 \Rightarrow 2^x = 8 = 2^3 \Rightarrow \boxed{x=3}$$

~~$2^x = z = -10$~~ IMPOSSIBLE, 2^x és sempre positiu \Rightarrow El problema només té una solució, $\boxed{x=3}$

e) Resol: $3 \log(2x) - \log 100 = \log 8 + \log x$

SISTEMES D'EQUACIONS.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 5 \\ 2x - y = 0 \end{array} \right\}$$

(b) REDUCCIÓ

$$\begin{array}{l} x + 2y = 5 \\ 2 \cdot (2x - y = 0) \end{array}$$

$$5x \quad / \quad = 5 \Rightarrow \boxed{x = \frac{5}{5} = 1}$$

$$1 + 2y = 5 \Rightarrow 2y = 4 \Rightarrow \boxed{y = \frac{4}{2} = 2}$$

(a) SUBSTITUCIÓ

$$\boxed{2x = y}$$

$$\boxed{y = 2 \cdot 1 = 2}$$

He aïllat l'y

$$x + 2 \cdot (2x) = 5$$

$$x + 4x = 5 \Rightarrow 5x = 5$$

COMPROVACIÓ
 $1 + 2 \cdot 2 = 5 \quad \checkmark$

$$2 \cdot 1 - 2 = 0 \quad \checkmark$$

$$\boxed{x = \frac{5}{5} = 1}$$

~~EXERCICI~~

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 8 \\ 5x + 8y = 14 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 8 \\ 5x + 8y = 14 \end{array} \right\}$$

REDUCCIÓN

$$\begin{array}{r} -5(x - y = 8) \\ 5x + 8y = 14 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} / \quad 13y = -26 \Rightarrow y = \frac{-26}{13} = -2 \\ x - (-2) = 8 \Rightarrow x + 2 = 8 \Rightarrow x = 6 \end{array}$$

MÉTODO de GAUSS

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 9 \\ 2x - y + 3z = 14 \\ 2x + y - z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 14 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \rightarrow F_1 \\ \rightarrow F_2 \\ \rightarrow F_3 \end{array} \end{array}$$

$$\text{...} \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ 0 & & & \\ & & & \\ 0 & 0 & & \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{-2F_1 + F_2} \\ \xrightarrow{-2F_1 + F_3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & -3 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & -18 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & -3 & -18 \\ 0 & -3 & 1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{-3F_2 + F_3}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & -3 & -18 \\ 0 & 0 & 10 & 50 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$10z = 50 \Rightarrow \boxed{z = \frac{50}{10} = 5}$$

$$-y - 3 \cdot \overset{z}{5} = -18$$

$$-y = 15 - 18 = -3$$

$$\boxed{y = 3}$$

$$x + y + z = 9$$

$$x + 3 + 5 = 9 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

Solució	$x = 1$
Única	$y = 3$
	$z = 5$

EXERCICI

$$\left. \begin{array}{l} x - y + z = 2 \\ x + y + 2z = 9 \\ 2x + 2y + 4z = 15 \end{array} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 2 & 4 & 15 \end{array} \right) \sim \uparrow$$

$$\begin{array}{l} -F_1 + F_2 \\ -2F_1 + F_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 2 & 11 \end{array} \right) \sim \uparrow$$

$$-2F_2 + F_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{array}{l} 0 \cdot z = -3 \\ 0 = -3 \end{array} \begin{array}{c} \triangle \\ \cdot \end{array} \text{IMPOSSIBLE}$$

Per tant el sistema no té solució, és
UN SISTEMA INCOMPATIBLE