

TMA. del RESIDU

$$P(X) = X^2 - 4$$

valor numèric per a

$$X = 1$$

$$P(1) = 1^2 - 4 = 1 - 4 = -3$$

(a) $\frac{X^2 - 4}{X - 1}$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 0 & -4 \\ 1 & & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & -3 \end{array}$$

(b)

$$P(X) = 2X^2 + X + 1$$

$$P(2) = 2 \cdot 2^2 + 2 + 1 = 11$$

$$\frac{2X^2 + X + 1}{X - 2}$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & 1 & 1 \\ 2 & & 4 & 10 \\ \hline & 2 & 5 & 11 \end{array}$$

TMA. del RESIDU

$$\frac{P(x)}{x-a}$$

$P(a)$ = Residu
de la divisió de
 $P(x)$ entre $(x-a)$

EXEMPLES

① $P(x) = 2x^4 - 2x^3 - 22x^2 + 10x + 17$

Calcula $P(2) =$

	2	-2	-22	10	17
2		4	4	-36	-52
	2	2	-18	-26	-35

② Troba el residu de les divisions següents

$$\frac{x^8 - 4}{x - 1}$$

$$R = P(1) = 1^8 - 4 = 1 - 4 = -3$$

$$P(x) = x^8 - 4$$

$$\frac{\overbrace{x^3 - 2}^{P(x)}}{x + 1}$$

$$R = P(-1) = (-1)^3 - 2 = -3$$

$$\textcircled{C} \quad \frac{\overbrace{x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 3x - 1}^{P(x)}}{x-2}$$

$$P(x)$$

$$P(2) =$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -3 & -5 & 3 & -1 \\ 2 & & 2 & -2 & -14 & -22 \\ \hline & 1 & -1 & -7 & -11 & -23 \end{array}$$

Segui $P(x) = x^3 + 2x^2 - 10$. Calcula $P(2)$ aplicant el teorema del residu i sense aplicar-lo, i comprova que et surt el mateix resultat:

- Calculem el quocient $P(x) : (x - 2)$ pel mètode de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & 0 & -10 \\ & & 2 & 8 & 16 \\ \hline 2 & 1 & 4 & 8 & 6 = R = P(2) \end{array}$$

$$P(2) = \boxed{6}$$

Calculem $P(2)$ i comprovem que és 6:

$$P(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 10 = 8 + 2 \cdot 4 - 10 = 8 + 8 - 10 = \boxed{6}$$

Sense fer cap divisió, contesta:

a) $P(x) = x^3 + 5x^2 - 9x - 45$ és múltiple de $x+5$? Sí ✓

b) $x-2$ és divisor del polinomi $P(x) = x^3 + 4$?

a) $\frac{x^3 + 5x^2 - 9x - 45}{x+5}$ és exacta?

1	5	-9	-45
-5	-5	0	45
1	0	-9	0

b) $P(2) = 2^3 + 4 = 8 + 4 = 12 \neq 0$

2	1	0	0	4
		2	4	8
	1	2	4	12

⇒ No és exacta ⇒
⇒ $(x-2)$ no és divisor de $P(x)$

ARRELS o ZEROS d'UN POLINOMI

↓ Recordatori

$x=a$ és una arrel o zero de $P(x)$
 $P(x)$ polinomi si $P(a)=0$

Exemples

$$P(x) = x - 3$$

grau 1

$$x = 3$$

$$P(x) = x^2 - 4$$
$$= (x - 2) \cdot (x + 2)$$

grau 2

$$x = 2$$

$$x = -2$$

ZEROS o ARRELS

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

FÓRMULA de CARDANO-VIETA

EXAMPLE

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

COMPROVACIÓ

$$x = 2 \quad 2^2 + 2 - 6 = 6 - 6 = 0 \quad \checkmark$$
$$(-3)^2 - 3 - 6 = 9 - 3 - 6 = 9 - 9 = 0 \quad \checkmark$$

(a) $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

com que és de grau

3 $\Rightarrow$ Tindrà 3 arrels

Si un polinomi $P(x)$ té arrels

enteres $(\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$ llavors ha de $\mathbb{Z}$

ser divisora del terme independent

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$\text{Div}(-4) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$

$P(1) = 2 - 8 = -6$

$P(-1) = -1 + 1 + 4 - 4 = 0 \quad \checkmark \quad \boxed{x = -1}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -4 & -4 \\ -1 & & -1 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$



$P(x) = (x+1) \cdot (x^2-4) = (x+1)(x-2)(x+2) \quad (x^2-4)$

Factoritza
 (b) $P(x) = x^2 + x - 6$

$P(2) = 0 \checkmark$

	1	1	-6
2		2	6
	1	3	0

$\Downarrow$
 $x+3$

$6 = 3 \cdot 2$
 $\text{Div}(-6) = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$
 $12 = 2^2 \cdot 3$
 $(x-2)$

FACTORITZACIÓ

$P(x) = (x-2) \cdot (x+3)$

$x=2$	ARRELS o ZEROS de $P(x)$
$x=-3$	

(c) Factoritza $x^3 + 5x^2 + x + 5$

$\text{Div}(5) = \{\pm 1, \pm 5\}$

$P(-5) = 0 \checkmark$
 $P(x) = (x+5)(x^2+1)$
1 arrel entera
2 arrels imaginàries
($\pm \sqrt{-1}$)

	1	5	1	5
-5		-5	0	-5
	1	0	1	0

x^2+1

$$\textcircled{d} \quad x^2 + 2x = x \cdot (x + 2)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{e} \quad x^4 - 3x^2 &= x^2 \cdot (x^2 - 3) = \\ &= x^2 \cdot (x - \sqrt{3}) \cdot (x + \sqrt{3}) \\ &= x \cdot x \cdot (x - \sqrt{3}) \cdot (x + \sqrt{3}) \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - 3 = 0 \\ x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm \sqrt{3} \end{array} \right.$$

$x = 0$ arrel doble

$$x = \sqrt{3}$$

$$x = -\sqrt{3}$$

$$\textcircled{f} \quad 8x^4 - 4x^3 + 10x^2 = 2x^2 (4x^2 - 2x + 5)$$

$$4x^2 - 2x + 5 = 0$$

Per tant

$$8x^4 - 4x^3 + 10x^2 =$$

$$= 2x^2 \cdot (4x^2 - 2x + 5)$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 4 \cdot 5}}{2 \cdot 4} =$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{-76}}{8}$$

arrels
imaginàries

2 arrels imaginàries, no puc factoritzar més

(9) $x^4 - 2x^3 + x - 2 = P(x)$

$$\text{Div}(-2) = \{\pm 1, \pm 2\}$$

$P(2) = \dots = 0 \checkmark \Rightarrow (x-2)$

1	-2	0	1	-2	
2	2	0	0	2	
1	0	0	1	0	

$(x^3 + 1)$

$$\underbrace{x^3 + 1 = 0}_{Q(x)}$$

$Q(x)$

	1	0	0	1
-1		-1		1
	1	-1	1	0



$$x^2 - x + 1$$

$$Q(-1) = \dots = 0$$

$$P(x) = (x-2)(x+1)\underbrace{(x^2 - x + 1)}$$

racines imaginaires

$$\dots \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 1}$$

Factoritza el polinomi $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

divisors de 4 $\pm 1; \pm 2; \pm 4$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -4 & 4 \\ 1 & & 1 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & \underline{0} = P(1) \end{array}$$

Per la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -4 & \\ -1 & & -1 & 1 & \\ \hline & 1 & -1 & \underline{-3} \neq 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -4 & \\ 2 & & 2 & 4 & \\ \hline & 1 & 2 & \underline{0} & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rr} & 1 & 2 \\ -2 & & -2 \\ \hline & 1 & \underline{0} \end{array}$$

$$\begin{cases} P(-1) \neq 0 \rightarrow -1 \text{ no és arrel} \\ P(2) = 0 \rightarrow 2 \text{ és arrel} \\ P(-2) = 0 \rightarrow -2 \text{ és arrel} \end{cases} \rightarrow \boxed{P(x) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x+2)}$$

Factoritza els polinomis següents:

$$P(x) = x^2 + 3x - 10$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{-3+7}{2} = \frac{4}{2} = \boxed{2} \\ \frac{-3-7}{2} = \frac{-10}{2} = \boxed{-5} \end{cases}$$

Té dues arrels: 2 i -5 $\rightarrow P(x) = (x-2) \cdot (x-(-5)) = \boxed{(x-2) \cdot (x+5)}$

$$P(x) = 4x^2 - 4x + 1$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{8} = \frac{4 \pm 0}{8} = \begin{cases} \frac{4+0}{8} = \frac{4}{8} = \boxed{\frac{1}{2}} \\ \frac{4-0}{8} = \frac{4}{8} = \boxed{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$P(x) = 4 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = \boxed{4 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}$$

Factoritza el polinomi següent

$$P(x) = 2x^2 + 4x - 6 \quad \text{Sol.: } P(x) = 2(x+3)(x-1)$$

$$x^4 - 16 = (x^2)^2 - 4^2 = (x^2 + 4)(x^2 - 4) = (x^2 + 4)(x - 2)(x + 2)$$

$$3x^3 + 9x^2 + 3x - 9 = 3 \cdot (x^3 + 3x^2 + x - 3)$$

No podem dir com són les solucions

$$P(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6 \quad \begin{array}{l} \text{divisors de } -6 \\ \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} -1 & 1 & 3 & -3 & -11 & -6 \\ & & -1 & -2 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & -5 & -6 & \underline{0} = P(-1) \end{array} \rightarrow \begin{cases} P(-1) = 0 \rightarrow \underline{-1 \text{ és arrel}} \\ P(x) = (x+1) \cdot (x^3 + 2x^2 - 5x - 6) \end{cases}$$

Busquem ara arrels del polinomi quocient $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$. Ho continuem provant per la regla de Ruffini començant per -1, perquè podria tornar a ser arrel:

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 1 & 2 & -5 & -6 \\ & & -1 & -1 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & \underline{0} = Q(-1) \end{array} \rightarrow \begin{cases} Q(-1) = 0 \rightarrow -1 \text{ és arrel altre cop} \\ \rightarrow P(x) = (x+1) \cdot (x+1) \cdot (x^2 + x - 6) = \\ \quad \quad \quad = (x+1)^2 \cdot (x^2 + x - 6) \end{cases}$$

Com que l'últim polinomi quocient que ens ha sortit és de grau 2, resollem l'equació de segon grau: $x^2 + x - 6 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = \boxed{2} \\ \frac{-1-5}{2} = \frac{-6}{2} = \boxed{-3} \end{cases}$$

<u>Arrels:</u> -1 (doble), 2, -3. $P(x) = (x+1)^2 \cdot (x-2) \cdot (x+3)$
--